

PRECORSO DI MATEMATICA

RICHIAMI TEORICI ED ESERCIZI SULLE EQUAZIONI IRRAZIONALI

Equazioni irrazionali del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$.

- *Caso 1: n dispari*

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \quad \iff \quad f(x) = [g(x)]^n$$

Esempio 1: Risolvere la seguente equazione

$$\sqrt[3]{x^3 - 4} = x - 1.$$

Svolgimento: Elevando al cubo entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$x^3 - 4 = (x - 1)^3.$$

Calcolando il cubo del binomio si ha

$$x^3 - 4 = x^3 - 1 - 3x^2 + 3x$$

da cui, sommando i monomi simili, segue

$$3x^2 - 3x - 3 = 0$$

che ammette due soluzioni reali date da

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

- *Caso 2: n pari*

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n \end{cases}$$

che si riduce al seguente

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = [g(x)]^n, \end{cases}$$

dal momento che la condizione $f(x) \geq 0$ è implicata dalle altre due equazioni presenti nel sistema.

Esempio 2: Risolvere la seguente equazione

$$\sqrt{2x+1} = 3x - 2.$$

Svolgimento: L'equazione data è equivalente al seguente sistema

$$\begin{cases} 3x - 2 \geq 0 \\ 2x + 1 = (3x - 2)^2, \end{cases}$$

che, svolgendo il quadrato e sommando i monomi simili nella seconda equazione, si può riscrivere come

$$\begin{cases} x \geq 2/3 \\ 9x^2 - 14x + 3 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si ha

$$\begin{cases} x \geq 2/3 \\ x_1 = \frac{7 - \sqrt{22}}{9}, \quad x_2 = \frac{7 + \sqrt{22}}{9}. \end{cases}$$

Poiché $x_1 < 2/3$ e $x_2 > 2/3$, l'equazione irrazionale data ha come unica soluzione

$$x = \frac{7 + \sqrt{22}}{9}.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

1. $\sqrt{4 - 3x} = -2$

2. $\sqrt[3]{x(x-7)} = 0$

3. $\sqrt{x^2 - 1} = x - 2$

4. $\sqrt[3]{3x - 5} + 1 = 0$

5. $\sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{3x-4}$

6. $\sqrt{2x+1} = \sqrt{4-x}$

7. $\frac{x}{\sqrt[4]{2x^2-1}} = 1$

8. $\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{1-4x}$

9. $\sqrt{1-x} - \sqrt{2-x} + \sqrt{3-2x} = 0$

$$10. \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^2}} = 4$$

$$11. \frac{x + \sqrt{2-x^2}}{x - \sqrt{2-x^2}} - (1-x) = \sqrt{2-x^2}$$

$$12. \sqrt[3]{x-1} - x = \sqrt[9]{x-7}$$

$$13. \frac{3}{x - \sqrt{2+x^2}} - x = \sqrt{x^2+2}$$

$$14. (\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} - 6 = 0$$

$$15. \sqrt{x^2-1} + \sqrt{\frac{x-2}{x}} - x^2 = 0$$

$$16. \frac{1}{x - \sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}}$$

$$17. \sqrt[3]{x(x^2-9) + 2(x^2-13)} - 1 = x$$

$$18. \sqrt[4]{x^2+5x+6} = \sqrt{x+4}$$

$$19. \frac{\sqrt{x^2-x}}{x-1} = 1$$

$$20. 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{2x} = \frac{7+5x}{\sqrt{x-1}}$$