

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE EQUAZIONI IRRAZIONALI

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione

$$\frac{9}{1 + \sqrt{1-x}} + \frac{4}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{3}{x}.$$

Svolgimento: Per la realtà dei due radicali e l'esistenza delle frazioni bisogna imporre le seguenti condizioni

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - x \geq 0 \\ 1 + \sqrt{1-x} \neq 0 \\ 1 - \sqrt{1-x} \neq 0 \\ x \neq 0, \end{array} \right.$$

le cui soluzioni sono

$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \leq 1 \\ x \leq 1 \vee x \neq 0 \\ x \neq 0. \end{array} \right.$$

Quindi il campo di esistenza dell'equazione data è $x < 0 \vee 0 < x \leq 1$.

Ora risolviamo l'equazione. Il m.c.m. dei denominatori è

$$(1 + \sqrt{1-x})(1 - \sqrt{1-x}) = 1 - (1-x) = x,$$

allora l'equazione data si può riscrivere come

$$\frac{9(1 - \sqrt{1-x}) + 4(1 + \sqrt{1-x}) - 3}{x} = 0$$

che equivale a

$$9(1 - \sqrt{1-x}) + 4(1 + \sqrt{1-x}) - 3 = 0,$$

essendo $x \neq 0$ nel campo d'esistenza.

Moltiplicando e sommando i termini simili si ottiene

$$\sqrt{1-x} = 2$$

che nel campo d'esistenza dell'equazione è equivalente a

$$1-x = 4,$$

la cui unica soluzione è data da $x = -3$. Poiché $x = -3$ soddisfa alle condizioni di esistenza, allora è la soluzione dell'equazione data.

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

1. $x + \sqrt{10x+6} = 9$

2. $\sqrt{x+8} + \sqrt{x} = 2$

3. $\sqrt{4x^2+9} - \sqrt{9-4x} - 2x = 0$

4. $x + \sqrt{x} - 20 = 0$

5. $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} - \frac{1}{4} = 0$

6. $\sqrt[4]{x^4+3x-2} = x$

7. $\sqrt{x+\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x-\sqrt{x}}$

8. $\frac{4\sqrt{x}-3}{3} - \frac{3\sqrt{x}-5}{4} = 2$

9. $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} - \frac{1}{4} = 0$

10. $\sqrt[6]{x^3 - \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt[3]{4-x}} = \sqrt{x}$

11. $5x\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} = 296$

12. $\sqrt{6 - \sqrt[3]{x-4}} = 2$

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni irrazionali al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$

1. $\sqrt{x^2 - 2a} + a = x$

2. $\sqrt{4x^2 + a^2} = 2x + \sqrt{a^2 - 4x}$

3. $\sqrt{1 + \frac{8a}{x}} = 1 + \frac{2a}{\sqrt{x}}$

4. $\frac{\sqrt{1 + \frac{x}{a}} + \sqrt{1 - \frac{x}{a}}}{\sqrt{1 + \frac{x}{a}} - \sqrt{1 - \frac{x}{a}}} = \frac{a}{x}$

5. $\sqrt{1-ax} = a\sqrt{x+1}$
6. $\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} - 1 = \frac{x}{a} - \frac{1}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}$
7. $\sqrt{x-a} + \sqrt{1-x} = \sqrt{1-a}$
8. $\frac{\sqrt{x+a^2} + 2}{3} + 2 + \frac{3}{\sqrt{x+a^2} - 2} = 0$

Esercizio 2: Trovare il valore di un numero sapendo che aggiungendo 5 al doppio della sua radice quadrata si ottiene 9.

Svolgimento: Detto x il numero da determinare, l'equazione da risolvere è

$$2\sqrt{x} + 5 = 9,$$

che si può riscrivere come

$$\sqrt{x} = 2.$$

Tale equazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

la cui soluzione è $x = 4$.

Esercizi: Risolvere i seguenti problemi utilizzando una sola incognita.

1. Trovare il valore di un numero sapendo che i suoi $5/3$ equivalgono alla radice quadrata del numero che si ottiene aggiungendo 16 al quadrato del numero stesso;
2. Trovare un numero che, aggiunto al quadruplo della sua radice quadrata, dia 32;
3. Trovare il valore di un numero sapendo che, se al triplo della sua radice quadrata si aggiunge 1, si ottiene la somma di 4 con il doppio della radice quadrata del numero stesso;
4. Sui lati del quadrato $ABCD$ ed esternamente ad esso si costruiscono quattro triangoli isosceli congruenti la cui altezza è lunga 36 cm. Sapendo che il perimetro dell'ottagono ottenuto è $13/5$ del perimetro del quadrato, trovare l'area dell'ottagono;
5. Trovare il valore di un numero sapendo che la somma tra la radice quadrata del suo consecutivo con se stesso supera di 7 la metà del numero stesso;
6. Trovare il valore di un numero naturale sapendo che la radice quadrata del suo successivo è uguale a 4;
7. Trovare il valore di un numero sapendo che la radice quadrata della differenza tra il suo quadrato e 16, aumentata di 2, dà il numero stesso;
8. Trovare il valore di un numero sapendo che il doppio della radice quadrata del numero stesso, a cui è stato tolto 2, è pari a 7;

9. Trovare il valore di un numero sapendo che la radice quadrata della somma del suo quadrato con 9 uguaglia la differenza tra 21 e il quadrato del numero stesso;
10. Trovare il valore di un numero sapendo che la radice quadrata della somma di 4 con il triplo del numero stesso, diminuita di 3, è uguale a 2.