

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Esercizio 1: Risolvere la seguente disequazione

$$5^x < 25.$$

Svolgimento: Essendo $25 = 5^2$, la disequazione data si può riscrivere nella forma

$$5^x < 5^2.$$

Poiché al primo e al secondo membro ci sono due esponenziali con la stessa base 5 **maggiore di 1**, tale disequazione è equivalente a

$$x < 2,$$

che è la soluzione cercata.

Esercizio 2: Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{1}{3^x} \geq 3.$$

Svolgimento: Essendo $3 = (1/3)^{-1}$, la disequazione data si può riscrivere come

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}.$$

Poiché al primo e al secondo membro ci sono due esponenziali con la stessa base $1/3$ **minore di 1**, tale disequazione è equivalente a

$$x \leq -1$$

che è la soluzione cercata.

Esercizio 3: Risolvere la seguente disequazione

$$4^{1+x/2} - 2^{x-1} < 56.$$

Svolgimento: L'equazione data si può riscrivere nella forma

$$(2^2)^{1+x/2} - 2^{x-1} < 56$$

da cui si ottiene

$$2^{2+x} - 2^{x-1} < 56.$$

Mettendo in evidenza 2^{x-1} al primo membro si ha

$$2^{x-1}(8-1) < 56,$$

da cui segue

$$7 \cdot 2^{x-1} < 56.$$

Dividendo per 7 il primo e il secondo membro si ottiene

$$2^{x-1} < 8.$$

Poiché $8 = 2^3$ tale disequazione diventa

$$2^{x-1} < 2^3,$$

che equivale a

$$x - 1 < 3,$$

essendoci al primo e al secondo membro due esponenziali con la stessa base 2 **maggiore di** 1. Allora la disequazione data è verificata se $x < 4$.

Esercizio 4: Risolvere la seguente disequazione

$$5^x < 20.$$

Svolgimento: Poiché 20 non si può scrivere come potenza di 5, per risolvere la disequazione data bisogna passare ai logaritmi (ciò è possibile essendo $5^x > 0$ e $20 > 0$).

Passando al logaritmo in base 5 in entrambi i membri si ha

$$\log_5(5^x) < \log_5 20,$$

essendo la base del logaritmo **maggiore di** 1.

Usando le proprietà dei logaritmi si ottiene

$$x < \log_5 20,$$

che è la soluzione della disequazione data.

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $3^x > \frac{1}{9}$
2. $2^{x+1} \geq 5^{1-x}$
3. $4^x - 2^x > 0$
4. $\frac{1 + 2^x}{1 - 2^x} \leq 1$
5. $2^{2x-1} - 5^x \geq 3 \cdot 5^{x+1}$
6. $3^x (2 - 3^x) < 1$
7. $4 \cdot 2^x + 9 \cdot 2^{-x} > 12$
8. $4^x + 1 > \sqrt{16^x + 2}$
9. $|2^x - 4| < 4$
10. $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \geq 39$

$$11. 2^x > \frac{1}{8}$$

$$12. \frac{5^x - 10}{5^x - 5} > 0$$

$$13. \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{4}{9}$$

$$14. 3 - 2^{1-x} - \left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$$

$$15. 5^{x/2} - 4^x > 0$$

$$16. \sqrt{9 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 4} > 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2$$

$$17. 5^x - 4 \geq 5^{1-x}$$

$$18. \frac{2^x}{2^x + 1} + \frac{2^x}{2^x + 4} \leq 1$$

$$19. |5^x - 1| + 3 \cdot 5^x - 3 < 0$$

$$20. \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{19}{6}$$

$$21. 5 \cdot 3^{1+x} + 6^{1-x} > 0$$

$$22. 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 4$$

$$23. \frac{9^x - 1}{3^x - 4} \leq 0$$

$$24. 4^x - 10 \cdot 2^x + 16 \geq 0$$

$$25. (2^{x-1} - 1)(3^{2x+1} - 9) \geq 0$$

$$26. 3^{x+2} < 4^{2x+1}$$

$$27. \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{27}{8}$$

$$28. 2 \cdot 9^x \geq 3^{x+2} - 10$$

$$29. 1 < 4^x < 16$$

30. $25^x - 13 \cdot 5^x + 30 \geq 0$

31. $\frac{4}{9} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq 1$

32. $|3^x - 3| > 6$

33. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -1$

34. $9^x - 10 \cdot 3^x + 25 \geq 0$

35. $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$

36. $\frac{2^{x-1} \cdot 4^{1+x}}{6^{1-x}} < 3$

37. $\frac{1 - 3^x}{4^x + 2^x - 2} < 0$

38. $5^x < -5$

39. $\frac{3 \cdot 2^x}{2^x - 2} + \frac{4}{2^x + 2} + \frac{3 \cdot 4^x - 8}{4 - 4^x} < 0$

40. $2^x \cdot 4 > \frac{1}{4}$

41. $3^x - 5 \cdot 3^{1-x} \leq 2$

42. $|4^x + 2| + |4^x + 1| + 2|4^x - 2| > 7$

43. $\frac{2^x - 4^x - 1}{3^{-x} - 25 \cdot 3^x} < 0$

44. $3^{x^2} > 81$

45. $\frac{2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2}{4 \cdot 3^x - 3^{2x+1} - 1} < 0$

46. $2^x + 2^{4-x} > 17$

47. $2^{2x+1} \geq 5^{1-x}$

48. $2 \cdot 3^x - 9^x > 1$

49. $|2^{2x} - 1| \leq 1$

50. $64 - 2 \cdot 3^x > 45 + 3^{2-x}$

51. $3^{1-4x} > 9^{x+1}$

52. $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} > 1$

53. $3^{x+1} - 3^{x-2} + 3^x \geq 35$

54. $7^{x+1} + 7^{x-1} < 7$

55. $2^{|x^2-3x+2|} = \left(3^{|2-x|}\right)^{x-1}$

56. $3^{x-1} > \frac{4^{1+x}}{5}$

57. $4^x + 1 > 2^{x+1}$

58. $\frac{2^x(3 \cdot 2^x - 5) + 2}{1 - 3^x} > 0$

59. $\frac{4^x \cdot 16^{x+1}}{8^{x-3}} < 1$

60. $6^{x+1} + 6^x + 6^{x-1} < 6$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1.
$$\begin{cases} 2^{x+1} < 2 \\ \sqrt[3]{3^{x^2-1}} - 1 < 0 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-3} \leq 1 \\ \frac{2}{3^x} - 18 \geq 0 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} 2^{|x|+1} + 2^{|x|-1} < 20 \\ 4^x - 2^x > 2 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} \sqrt{2^{x+1}} - 1 \geq 0 \\ \frac{25^x + 5^x - 5}{3 - 9^x} < 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 27 \leq 0 \\ 2^{2x+1} + 2^x - 2^{x+3} - 4 \geq 0 \end{cases}$$