

## PRECORSO DI MATEMATICA

### RICHIAMI TEORICI ED ESERCIZI SULLE DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Disquazioni irrazionali del tipo  $\sqrt[n]{f(x)} \geq g(x)$ .

- *Caso 1: n dispari*

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \quad \iff \quad f(x) > [g(x)]^n$$

e

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \quad \iff \quad f(x) < [g(x)]^n$$

**Esempio 1:** Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt[3]{x^3 - 2x} < x - 2.$$

*Svolgimento:* Elevando al cubo entrambi i membri dell'equazione si ottiene

$$x^3 - 2x < (x - 2)^3.$$

Calcolando il cubo del binomio si ha

$$x^3 - 2x < x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

da cui, sommando i monomi simili, segue

$$6x^2 - 14x + 8 < 0,$$

le cui soluzioni sono date da

$$1 < x < \frac{4}{3}.$$

- *Caso 2: n pari*

Consideriamo la disequazione

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x).$$

Trovare le soluzioni di tale disequazione equivale a risolvere

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n \end{array} \right.$$

che si possono riscrivere come

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^n, \end{cases}$$

dal momento che nel secondo sistema la condizione  $f(x) \geq 0$  è implicata dalle altre due disequazioni.

**Esempio 2:** Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt{4-x} > 3x-2.$$

*Svolgimento:* La disequazione data è equivalente a

$$\begin{cases} 4-x \geq 0 \\ 3x-2 < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 4-x > (3x-2)^2. \end{cases}$$

Calcolando il quadrato del binomio e sommando i monomi simili si ha

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2/3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2/3 \\ 9x^2 - 11x < 0. \end{cases}$$

Risolvendo la disequazione di secondo grado si ha

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x < 2/3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 2/3 \\ 0 < x < 11/9, \end{cases}$$

e quindi i due sistemi hanno come soluzione rispettivamente  $x < 2/3$  e  $2/3 \leq x < 11/9$ .

Dunque la disequazione data è verificata per  $x < 11/9$ .

Consideriamo ora la disequazione

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x).$$

Trovare le soluzioni di tale disequazione equivale a risolvere il sistema

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^n. \end{cases}$$

**Esempio 3:** Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt{3x+1} < x+7.$$

*Svolgimento:* La disequazione data è equivalente a

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x + 7 > 0 \\ 3x + 1 < (x + 7)^2 \end{cases}$$

Calcolando il quadrato del binomio e sommando i monomi simili si ha

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x + 7 > 0 \\ x^2 + 11x + 48 > 0. \end{cases}$$

Risolviendo la disequazione di secondo grado si ha

$$\begin{cases} x \geq -1/3 \\ x > -7 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e quindi tale sistema ha come soluzione  $x \geq -1/3$ .  
 Dunque la disequazione data è verificata per  $x \geq -1/3$ .

**Esercizi:** Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

1.  $\sqrt{x^2 + x + 1} < 4$
2.  $\sqrt{x^2 + 2x} \geq 3$
3.  $x + 1 < \sqrt{2x - 5}$
4.  $\sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 1} > 0$
5.  $\sqrt{\frac{1 - x}{2 + x}} \geq 0$
6.  $\sqrt{2x + 1} > 1 - x$
7.  $\sqrt[3]{x^3 - 1} < x + 3$
8.  $\sqrt[3]{x^3 + 2x} \geq 4 + x$
9.  $\frac{3x - 1}{\sqrt{1 - x^2}} < 0$
10.  $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{2x + 1} \leq 0$
11.  $\sqrt{|x - 2|} < \frac{4}{3}$

$$12. \frac{x-3}{1-\sqrt{x^2-1}} < 0$$

$$13. \sqrt{x(3-x)+10} - x > 2$$

$$14. \sqrt{(x+2)^2-x} - x + 3 < 0$$

$$15. \sqrt[3]{\frac{x^4-2x^3}{x-1}} + 1 < x$$

$$16. |3x+1| < \sqrt{1-x}$$

$$17. \sqrt{\frac{|x-2|+2x-3}{x-4}} > 1$$

$$18. 1+x > \sqrt{x}$$

$$19. \frac{1-x+\sqrt{x^2-1}}{x+1} < 1$$

$$20. 2 - \sqrt{\frac{x-9}{x-1}} > 0$$