CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

GEOMETRIA ANALITICA: LA RETTA

Esercizio 1: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, determinare il valore di $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ affinché la retta di equazione

$$y = \frac{2-k}{2k}\,x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right)$$

- passi per il punto $P \equiv (1, 2)$
- sia parallela all'asse y
- sia parallela all'asse x
- formi con l'asse x un angolo di $45°$.

Svolgimento: Un punto $Q \equiv (q_1, q_2)$ appartiene ad una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ se

$$aq_1 + bq_2 + c = 0\,.$$

Allora per determinare i valori di k per cui P appartiene alla retta data basta sostituire nell'equazione della retta a x e y le coordinate di P. Così facendo si ottiene

$$2 = \frac{2-k}{2k} \cdot 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - 1\right)$$

da cui, calcolando il minimo comune multiplo, segue che

$$k = 1/2.$$

Pertanto l'equazione della retta passante per il punto P è data da $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{1}{2}\,.$

L'equazione dell'asse y è $x = 0$ e una generica equazione parallela all'asse y ha equazione $x = h$, $h \in \mathbb{R}$, pertanto il coefficiente di y risulta nullo. Poiché nell'equazione della retta data il coefficiente di y è 1 per ogni valore di $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora per nessun valore di k tale retta può essere parallela all'asse y.

L'equazione dell'asse x è $y = 0$ e una generica equazione parallela all'asse x ha equazione $y = h$, $h \in \mathbb{R}$, pertanto il coefficiente di x risulta nullo. Poiché nell'equazione della retta data il coefficiente di x è dato da $\frac{2-k}{k}$ per ogni valore di $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, allora, affinché la retta data sia parallela all'asse x, basta imporre che

$$\frac{2-k}{2k} = 0$$

da cui segue che $k = 2$. Pertanto l'equazione della retta parallela all'asse x è data da $y = -1/4$.

Una retta che forma con l'asse x un angolo di 45° è la bisettrice del primo e terzo quadrante, la cui equazione è data da $y = x$. Inoltre ogni retta che forma con l'asse x un angolo di 45° è parallela a tale bisettrice ed ha equazione $y = x + h$, $h \in \mathbb{R}$. Allora, affinché la retta data formi con l'asse x un angolo di 45°, basta imporre che il suo coefficiente angolare sia pari a 1, quindi

$$\frac{2-k}{2k} = 1$$

da cui segue che $k = 2/3$. Pertanto l'equazione della retta che forma con l'asse x un angolo di 45° è $y = x + \frac{1}{2}$.

Esercizi: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy

1. dati i punti $A \equiv (-1, \sqrt{3})$, $B \equiv (3, \sqrt{3})$, $C \equiv (5, 1)$ e $D \equiv (-1, 1)$, verificare che il quadrilatero $ABCD$ è un trapezio rettangolo e scrivere le equazioni delle rette a cui appartengono le basi del trapezio. Infine determinare l'area del trapezio;

2. un triangolo isoscele ha il vertice C nel terzo quadrante, la base $\overline{OA}$ è sull'asse x e misura 4. Sapendo che l'area del triangolo misura 16, scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e per C;

3. determinare le coordinate di un punto P appartenente alla retta di equazione $y = 3x$ in modo tale che, detta H la proiezione ortogonale di P sull'asse y, il perimetro del triangolo rettangolo OPH sia pari a $\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$;

4. il triangolo isoscele OAB, di base $\overline{OA}$, ha il vertice O coincidente con l'origine degli assi cartesiani, il vertice $A \equiv (6, 0)$ e il vertice B appartiene alla retta di equazione $y = 4$. Scrivere le coordinate del punto B e poi l'equazione della retta contenente il segmento $\overline{OB}$;

5. determinare il coefficiente angolare della retta passante per l'origine e tale che il suo punto di ascissa -3 abbia distanza pari a 12 dall'asse delle x;

6. determinare le coordinate di un punto P appartenente alla retta di equazione $3x - 4y = 0$ in modo tale che, detta H la proiezione ortogonale di P sull'asse x, l'area del triangolo rettangolo OPH sia pari a 24;

7. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le rette di equazione $y = 2x - 3$ e $y = (2k - 3)x + 2$ sono parallele o perpendicolari;

8. il triangolo ABC è tale che la retta contenente il lato $\overline{AB}$ ha equazione $y = 3x - 7$, quella contenente il lato $\overline{AC}$ ha equazione $x + 3y - 19 = 0$, il punto B ha ascissa 1 e il punto C ha ordinata 6. Determinare le coordinate dei tre vertici del triangolo, verificare che è rettangolo e che la sua area è pari a 15;

9. data la retta di equazione $y = 2x - 4$ e due suoi punti A e B rispettivamene di ordinata nulla e ascissa 5, determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione

$y = (2k-1)x + k - 2$ passa per il punto medio del segmento $\overline{AB}$;

10. determinare il valore di $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ affinché la retta di equazione $y = \dfrac{1-k}{k}x + k + 2$
    - passi per il punto $(0, 2)$
    - passi per il punto $(0, 3)$; come risulta in tal caso la retta?
    - sia parallela alla retta di equazione $x - 5y + 30 = 0$
    - formi con l'asse x un angolo acuto
    - sia perpendicolare alla retta di equazione $3x - 2y = 4$;
11. determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ affinché, date le rette r e s rispettivamente di equazione $(k-1)x + y - k + 2 = 0$ e $kx + (2k-1)y + 2 = 0$,
    - r e s siano parallele
    - r sia parallela all'asse x
    - s sia parallela all'asse y
    - r e s si incontrino in un punto della retta $x = 1$;
12. determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ affinché la retta di equazione $(k-1)x - (k-2)y + 1 - 2k = 0$
    - passi per il punto $(\sqrt{2}, 0)$
    - intersechi l'asse y in punti di ordinata positiva
    - intersechi l'asse x in punti di ascissa negativa o nulla;
13. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ le rette di equazione $(k-k^2)x + (h^2 - h - 2)y + 1 = 0$ e $(h^2 - 2h)x + (k^2 - 1)y - 3 = 0$ sono perpendicolari;
14. determinare le coordinate dei vertici C e D del quadrato $ABCD$ sapendo che $A \equiv (-1, 4)$ e $B \equiv (1, 1)$;
15. trovare l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette $x+y-4 = 0$ e $x - 3y + 4 = 0$, sapendo che stacca sul semiasse positivo delle x un segmento doppio di quello staccato sul semiasse positivo delle y;
16. due lati di un parallelogramma $ABCD$ appartengono alle rette di equazione $x+2y-3 = 0$ e $y = 2x + 4$ e uno dei vertici del parallelogrammo è il punto $A \equiv (5, 4)$. Determinare gli altri vertici e verificare che $ABCD$ è un quadrato;
17. determinare l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano di ascissa $\frac{2k+5}{5}$ e ordinata $1 - 2(k+5)$, con $k \in \mathbb{R}$;

18. scrivere l'equazione del luogo dei punti medi dei segmenti aventi per estremi il punto $A \equiv (2,3)$ e un punto della retta di equazione $4x - y + 4 = 0$;

19. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ due rette di equazione $x + ky - 2(3k + 2) = 0$ formano con le rette $x + y - 3 = 0$ e $3x - 4y - 9 = 0$ un parallelogrammo e poi calcolare la misura del perimetro e dell'area del parallelogrammo;

20. scrivere l'equazione del luogo dei punti di intersezione delle rette di equazione $3x - 4y + k = 0$ e $x - 2y + 2k = 1$.