CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

TRIGONOMETRIA: ESPRESSIONI TRIGONOMETRICHE

Esercizio 1: Verificare se per $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi$ vale la seguente uguaglianza

$$a\,(a-3b)^2 \sin(\alpha-\pi) - b\,(3a-b)^2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = (a+b)^3 \,.$$

Svolgimento: Sostituendo $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi$ nel primo membro dell'espressione data si ha

$$a\,(a-3b)^2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \pi\right) - b\,(3a-b)^2 \cos\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2}\right),$$

e quindi

$$a\,(a-3b)^2 \sin\frac{\pi}{2} - b\,(3a-b)^2 \cos\pi \,.$$

Essendo

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad \text{e} \quad \cos\pi = -1 \,,$$

si ottiene

$$a\,(a-3b)^2 \cdot 1 - b\,(3a-b)^2 \cdot (-1) \,.$$

Calcolando il quadrato dei due binomi si ha

$$a\left(a^2 - 6ab + 9b^2\right) + b\left(9a^2 - 6ab + b^2\right),$$

da cui segue

$$a^3 - 6a^2b + 9ab^2 + 9a^2b - 6ab^2 + b^3 \,,$$

e quindi

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3 \,.$$

Allora per $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi$ l'uguaglianza data è verificata.

Esercizio 2: Verificare se vale la seguente identità (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \cos\alpha + \sin\alpha \tan\alpha \,.$$

Svolgimento: Poiché

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\,,$$

il secondo membro dell'espressione data si può scrivere come

$$\cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ .$$

Facendo il minimo comune multiplo e utilizzando la prima relazione fondamentale della trigonometria

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,, \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$$

si ottiene

$$\cos\alpha + \sin\alpha\tan\alpha = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\ .$$

Quindi l'identità data è vera.

Esercizi: Calcolare il valore delle seguenti espressioni

1. $3\cos 90^\circ - 2\sin 180^\circ + 4\sin 270^\circ$
2. $2\cos 90^\circ + 3\tan 45^\circ - \cos 60^\circ$
3. $\dfrac{a}{\sin\frac{\pi}{2}} + b\sin\pi + \dfrac{b}{\cos\pi} + 2ab\cos\dfrac{3}{2}\,\pi$
4. $4\cos 180^\circ + 4\sin 90^\circ + 3\sin 180^\circ$
5. $\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} + \dfrac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}\right) : \dfrac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}$
6. $\sin\dfrac{3}{2}\,\pi - 2\cos\pi + \tan 2\pi$
7. $3\sin 90^\circ - \dfrac{1}{4}\cos 60^\circ + \dfrac{2}{3}\tan 45^\circ$
8. $\left(a^2 - b^2\right)\cos 270^\circ + \dfrac{2ab}{\cos 180^\circ} - \dfrac{a^2+b^2}{\sin 270^\circ}$
9. $2\sin 90^\circ + 3\sin 180^\circ + 4\sin 270^\circ$
10. $\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{3}} + \cos^2\dfrac{\pi}{4} - \cos\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{6}}$
11. $(a+b)\cos 0^\circ + 4ab\cos 180^\circ$
12. $3\cos\dfrac{\pi}{2} - 2\sin\dfrac{3}{2}\,\pi + \dfrac{3}{2}\tan 0$
13. $3\cos 90^\circ - 3\cos 0^\circ + 5\cos 180^\circ$

14. $\dfrac{\left(a^3-b^3\right)\sin\frac{\pi}{2}}{(a-b)\cos 0}+\left(a^2+b^2\right)\cos\pi-\dfrac{ab}{\cos 0}\ , \qquad a\neq b$

15. $\sin 180^\circ-\cos 0^\circ+\tan 0^\circ-\sin 270^\circ$

16. $(a-b)^2\sin\dfrac{\pi}{2}-4ab\cos 7\pi$

17. $\sqrt{3}\tan 60^\circ-4\tan 45^\circ+\cos 180^\circ$

18. $2\sin\dfrac{\pi}{2}-\cos\dfrac{3}{2}\pi+\tan 3\pi$

19. $\left(a^2-b^2\right)\cos\dfrac{3}{2}\pi+\dfrac{2ab}{\cos 16\pi}-\dfrac{a^2+b^2}{\sin\frac{3}{2}\pi}$

20. $5\cos 0^\circ-4\left(\sin 90^\circ+3\cos 180^\circ\right)$

21. $\sqrt{\dfrac{1-\sin\frac{\pi}{3}}{1+\sin\frac{\pi}{3}}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{3}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}}$

22. $(a+b)^2\sin 90^\circ+3ab\cos 180^\circ+ab\sin 270^\circ$

23. $\cos 270^\circ-3\sin 180^\circ+4\tan 180^\circ$

24. $\dfrac{\sin 45^\circ\cos 60^\circ-\cos 30^\circ\cos 45^\circ}{\cos 45^\circ\sin 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 60^\circ}$

25. $\sqrt{3}\tan 30^\circ-2\cos 30^\circ+4\sin 120^\circ$

26. $3\sin\dfrac{\pi}{2}+5\cos 0-4\tan 5\pi+2\cot\dfrac{\pi}{2}$

27. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan 60^\circ-\dfrac{3}{4}\cot 45^\circ+\cos 180^\circ\right)\left(3+\sin 90^\circ\right)$

28. $a^2\sin\dfrac{3}{2}\pi-(a-b)^2\sin\dfrac{7}{2}\pi+\dfrac{2ab}{\sin\frac{\pi}{2}}$

29. $2\sin 90^\circ-5\cos 180^\circ+3\tan 0^\circ$

30. $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\tan\dfrac{\pi}{4}+\tan\dfrac{\pi}{3}-3\tan\dfrac{\pi}{6}\right);$

Esercizi: Verificare se valgono le seguenti uguaglianze in corrispondenza del valore indicato dell'angolo α

1. $(a+b)^2 \cos(90^\circ - \alpha) - (a-2b)^2 \sin(180^\circ - \alpha) = 3b\,(2a-b)\sin\alpha\,, \quad \alpha = 90^\circ$

2. $a\,(a-3b)^2 \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) - b\,(b-3a)^2 \cos\alpha = (a+b)^3\ , \quad \alpha = \pi$

3. $(a+b)^2 \cos(\alpha - 180^\circ) + (a-2b)^2 \cos\alpha = 3b\,(2a-b)\sin(\alpha - 90^\circ)\ , \quad \alpha = 180^\circ$

4. $\dfrac{(a+b)\sin\alpha \cdot (a-b)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2b^2 \sin\alpha + 2ab\sin(\pi+\alpha)}{a\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - b\sin(\pi - \alpha)} = a - b\,, \quad \alpha = \pi\,, \quad a \neq b$

5. $(a-2)\,(a+3)\sin(\alpha - \pi) + (a+7)\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right) = (a+1)^2\ , \quad \alpha = \dfrac{3}{2}\,\pi$

Esercizi: Verificare se valgono le seguenti identità (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

1. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha} = 1 + \tan\alpha$

2. $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{1 + \tan\alpha} = \cos\alpha\,(\cos\alpha - \sin\alpha)$

3. $\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\sec^2\alpha = \tan^2\alpha - 1$

4. $\dfrac{1}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{\sin\alpha} = (\sin\alpha + \cos\alpha)\,(\tan\alpha + \cot\alpha)$

5. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{1 - \sin\alpha\cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$

6. $\dfrac{1}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \sin\alpha\cos\alpha$

7. $\cos\alpha\,(1 - \tan\alpha) + \sin\alpha\,(1 - \cot\alpha) = 0$

8. $\dfrac{\cos^2\alpha}{1 - \sin\alpha} = 1 + \sin\alpha$

9. $\cot\alpha\,(1 - \cos\alpha) = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

10. $2 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha\left(2\sec^2\alpha - \tan^2\alpha\right)$

11. $\dfrac{\sin^2\alpha+\tan^2\alpha}{\sin^2\alpha}=1+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

12. $\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}=\Big|\cos\alpha-\sin\alpha\Big|$

13. $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan\alpha+1}=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\tan\alpha-1}$

14. $\dfrac{\cos\alpha+\cot\alpha}{\cot\alpha}=\sin\alpha+1$

15. $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=1+\sin\alpha\cos\alpha$

16. $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha=\cos^4\alpha-\cos^2\alpha$

17. $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sec\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{1+\tan\alpha}$

18. $(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\tan\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha\cot\alpha$

19. $\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$

20. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

21. $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}=1-\cos\alpha$

22. $1-2\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\left(1-\cot^2\alpha\right)$

23. $\tan\alpha\,(1+\sin\alpha)=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

24. $\left(2\cos^2\alpha-1\right)=1-\tan^2\alpha$

25. $\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2\cot\alpha}{\sin\alpha}$

26. $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$

27. $\dfrac{2}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1}{\cos^3\alpha - 1} = \dfrac{\cos\alpha\,(1+\cos\alpha)}{1-\cos^3\alpha}$

28. $(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)^2 = 2\,(1+\sin\alpha)\,(1+\cos\alpha)$

29. $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha} = \Big|\sin\alpha + \cos\alpha\Big|$

30. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} + \cos^2\alpha = \dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$

Esercizi: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica

1. verificare che se $\alpha \in \left(\dfrac{\pi}{2}\,,\pi\right)$, allora vale la seguente identità
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} - \sqrt{1-\sin^2\alpha\cdot(-\tan\alpha)+1}}{\tan\frac{\pi}{4} + \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}-\cos\alpha}} = 1\,;$$

2. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $4k\sin\alpha + 12\cos^2\alpha = 5+4k$ ammette come soluzione $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$;

3. stabilire per quali valori di $a\,,b \in \mathbb{R}$ il sistema
$$\begin{cases} \cos^2\alpha + a\tan\beta = b \\ \\ \sqrt{2}\cos\alpha + b\sin\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a \end{cases}$$
ammette come soluzione
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\pi}{3} \\ \\ \beta = \dfrac{\pi}{4}\,; \end{cases}$$

4. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $k\tan 2\alpha - (k-1)\cot\alpha = \sqrt{3}$ ammette come soluzione $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.