CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

TRIGONOMETRIA: EQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Svolgimento: Poiché

$$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\frac{5}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e la funzione coseno è periodica di periodo 2π, l'equazione data ha come soluzioni

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \qquad \text{e} \qquad x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 2: Risolvere la seguente equazione

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1\,.$$

Svolgimento: Poiché

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1$$

e la funzione seno è periodica di periodo 2π, l'equazione data è soddisfatta se

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Allora si ha

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,,$$

da cui si ottiene

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 3: Risolvere la seguente equazione

$$2\cos^2 x + 7\sin x = 5\,.$$

Svolgimento: Innanzitutto è conveniente far comparire nell'equazione data solo una funzione trigonometrica. Utilizzando la prima relazione fondamentale della trigonometria

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad x \in \mathbb{R}\,,$$

si ha

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Sostituendo tale relazione nell'equazione si ottiene

$$2\left(1 - \sin^2 x\right) + 7\sin x - 5 = 0\,,$$

e quindi

$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0\,.$$

Ponendo $y = \sin x$, l'equazione si può riscrivere come

$$2y^2 - 7y + 3 = 0\,,$$

le cui soluzioni sono

$$y = 3 \qquad \vee \qquad y = \frac{1}{2}\,.$$

Quindi si ottiene

$$\sin x = 3 \qquad \vee \qquad \sin x = \frac{1}{2}\,.$$

L'equazione $\sin x = 3$ non ha soluzione, poichè

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

L'equazione $\sin x = \frac{1}{2}$ è verificata se

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,,$$

che costituiscono le soluzioni dell'equazione data.

Esercizio 4: Risolvere la seguente equazione

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1\,.$$

Svolgimento: Utilizzando le formule di addizione e sottrazione del seno l'equazione data si può riscrivere come

$$\sin x \cos\frac{\pi}{4} + \cos x \sin\frac{\pi}{4} - \left(\sin x \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \sin\frac{\pi}{4}\right) = 1\,,$$

da cui segue

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = 1\,.$$

Allora si ottiene

$$\sqrt{2}\cos x = 1\,,$$

da cui

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Poiché

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cos\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e la funzione coseno è periodica di periodo 2π, l'equazione data ha come soluzioni

$$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \qquad \text{e} \qquad x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi\,,\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 5: Risolvere la seguente equazione

$$1-\cos 2x=\sin x\,.$$

Svolgimento: Utilizzando la formula di duplicazione del coseno

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \qquad x\in\mathbb{R}$$

l'equazione data si può riscrivere come

$$1-\big(\cos^2 x-\sin^2 x\big)=\sin x\,,$$

da cui si ottiene

$$1-\cos^2 x+\sin^2 x=\sin x\,.$$

Dalla prima relazione fondamentale della trigonometria si ha

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x \qquad x\in\mathbb{R}\,,$$

quindi l'equazione data diventa

$$2\sin^2 x=\sin x\,.$$

Si ottiene

$$\sin x\,(2\sin x-1)=0\,,$$

le cui soluzioni sono le soluzioni delle equazioni

$$\sin x=0 \qquad \vee \qquad 2\sin x-1=0\,.$$

L'equazione $\sin x=0$ ha come soluzioni

$$x=k\pi\,,\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

L'equazione $\sin x=\frac{1}{2}$ è verificata se

$$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \vee \qquad x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\,,\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Allora l'equazione data ammette come soluzioni

$$x=k\pi \qquad \vee \qquad x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \qquad \vee \qquad x=\frac{5}{6}\pi+2k\pi\,,\ \ k\in\mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 6: Risolvere la seguente equazione

$$2\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2+2\cos x}\,.$$

Svolgimento: Innanzitutto bisogna imporre la condizione di esistenza

$$2 + 2\cos x \neq 0\,,$$

che equivale a

$$\cos x \neq -1\,,$$

le cui soluzioni sono

$$x \neq \pi + 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Utilizzando la formula di bisezione del seno

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

si ha

$$2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x\,.$$

Sostituendo tale relazione nell'equazione data si ottiene

$$1 - \cos x = \frac{1-\cos x}{2\,(1+\cos x)}\,,$$

da cui, calcolando il minimo comune multiplo, si ha

$$\frac{2\,(1-\cos x)\,(1+\cos x) - (1-\cos x)}{2\,(1+\cos x)} = 0\,.$$

Essendo $1 + \cos x \neq 0$ per la condizione di esistenza, tale equazione equivale a

$$2\,(1-\cos x)\,(1+\cos x) - (1-\cos x) = 0\,,$$

da cui si ottiene

$$(1-\cos x)\,(2 + 2\cos x - 1) = 0\,,$$

e quindi

$$(1-\cos x)\,(2\cos x + 1) = 0\,.$$

L'equazione $1 - \cos x = 0$ si può riscrivere come

$$\cos x = 1\,,$$

le cui soluzioni sono

$$x = 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,,$$

mentre l'equazione $2\cos x + 1 = 0$ equivale a

$$\cos x = -\frac{1}{2}\,,$$

le cui soluzioni sono

$$x = \frac{2}{3}\,\pi + 2k\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{4}{3}\,\pi + 2k\pi\,,\ \ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Allora l'equazione data ha come soluzioni

$$x = 2k\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 7: Risolvere la seguente equazione

$$\cos x - \sin x = 1\,.$$

Svolgimento: Tale equazione è lineare in seno e coseno e si può risolvere utilizzando le formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad x \neq \pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

dove $t = \tan\frac{x}{2}$. Per poter usare queste formule bisogna imporre che

$$x \neq \pi + 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ponendo $x = \pi + 2k\pi\,, \ k \in \mathbb{Z}$, nell'equazione e tenendo conto del fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π si ha

$$\cos\pi - \sin\pi = -1 + 0 \neq 1\,,$$

quindi $x = \pi + 2k\pi\,, \ k \in \mathbb{Z}$, non sono soluzioni dell'equazione data.
Sostituendo nell'equazione le formule parametriche si ottiene

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2} = 1\,.$$

Facendo il minimo comune multiplo si ha

$$\frac{1-t^2-2t-1-t^2}{1+t^2} = 0\,,$$

da cui segue

$$\frac{-2t^2-2t}{1+t^2} = 0\,.$$

Essendo $1 + t^2 > 0$, tale equazione equivale a

$$-2t^2 - 2t = 0\,,$$

e quindi a

$$2t\,(t+1) = 0\,,$$

le cui soluzioni sono

$$t = 0 \qquad \vee \qquad t = -1\,.$$

Allora si ha

$$\tan\frac{x}{2} = 0 \qquad \vee \qquad \tan\frac{x}{2} = -1\,.$$

L'equazione $\tan\frac{x}{2} = 0$ ha come soluzioni

$$\frac{x}{2} = k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

da cui segue
$$x = 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.$$
Infine l'equazione $\tan\dfrac{x}{2} = -1$, è verificata se
$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,,$$
e quindi se
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.$$
Allora l'equazione data ha come soluzioni
$$x = 2k\pi \qquad \vee \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizio 8: Risolvere la seguente equazione
$$\sin^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x = 0\,.$$
Svolgimento: Tale equazione è omogenea di secondo grado e per risolverla conviene dividere entrambi i membri per $\cos^2 x$: tale passaggio è lecito solo se $\cos x \neq 0$. Se $\cos x = 0$ allora
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,.$$
Sostituendo tali valori nell'equazione si ha
$$\begin{aligned}
&\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) - \left(1+\sqrt{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) + \sqrt{3}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\\
&= 1 - \left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 0 + 0\\
&= 1 \neq 0\,,
\end{aligned}$$
quindi $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, non sono soluzioni dell'equazione data.
Dividendo entrambi i membri dell'equazione per $\cos^2 x \neq 0$ si ottiene
$$\tan^2 x - \left(1+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0\,.$$
Ponendo $y = \tan x$ tale equazione di scrive come
$$y^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)y + \sqrt{3} = 0\,,$$
le cui soluzioni sono
$$y = 1 \qquad \vee \qquad y = \sqrt{3}\,.$$
Allora si ha
$$\tan x = 1 \qquad \vee \qquad \tan x = \sqrt{3}\,.$$
L'equazione $\tan x = 1$ è verificata se
$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

mentre l'equazione $\tan x = \sqrt{3}$ ha come soluzioni

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione data sono

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \vee \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$
3. $\tan\left(-\dfrac{x}{2}\right) = \tan\left(\pi - \dfrac{x}{3}\right)$
4. $\left(5 - 2\sqrt{5}\right)\cos^2 x = \sin^2 x$
5. $\sin x + \cos x = 0$
6. $\cos 2x + \sin^2 x = 0$
7. $\dfrac{3\cos x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + 2\sin^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{2}$
8. $\left|\sin^2 x - \sin x\right| = 0$
9. $\dfrac{3}{\cos x + 2} - \cos x = 4$
10. $(\sin x - 1)\,(2\sin x - 1) = 0$
11. $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$
12. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + x\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) = \dfrac{3}{2}$
13. $\cos x - 2\sin x\cos x - \sin x + 2\sin^2 x = 0$
14. $2\sqrt{3}\,\dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - 2\sin x + \sqrt{3}\tan x = 1$
15. $\tan^2(-x) - \tan(5\pi + x) = 0$
16. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$

17. $\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + 4\cos^4 x = 1$

18. $\cos x \cos 3x = \cos 4x \cos 2x$

19. $2\cos\frac{x}{2} - 2\cos x = \sqrt{3} - 1$

20. $\sin 5x = 5$

21. $\sqrt{1+\cos x} - \frac{1}{\sqrt{1+\cos x}} = 0$

22. $\tan^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\tan x + \sqrt{3} = 0$

23. $\sin x - \cos x = 2\sin x \cos x - 1$

24. $\sin 3x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

25. $2\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 1$

26. $\frac{\sin x}{1+\cos x} + \cot x = 2$

27. $4\sin x \cos x = 1 + 2\sin^2 x$

28. $\tan x = -1$

29. $2\sin^2 x + 2\cos 2x - 1 = 0$

30. $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x} = \frac{\cot x}{2\sin x}$

31. $5 - 2\cos^2 x - 4\sin x = 2\cos^2 x$

32. $2\tan x \cos x - \sqrt{3}\tan x = 0$

33. $3\sin x - \cos x = 4$

34. $\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin(\pi - x)$

35. $\frac{4\sin x - 1}{\sqrt{2\sin x + 1}} + 3\sqrt{2\sin x + 1} = 7\sqrt{\sin x}$

36. $2\cos\frac{x}{2} - 1 = 0$

37. $\cos^2 x + \frac{2}{\tan^2 x} = \frac{5}{2}$

38. $\sin x = \sin 2x$

39. $\left|\tan x\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

40. $\cos^2 2x + \cos 2x = 0$

41. $\sin^2 \dfrac{x}{2} + 2\cos x = \dfrac{5}{4}$

42. $\tan 4x = \sqrt{3}$

43. $5 + 2\sin 3x = \dfrac{3}{\sin 3x}$

44. $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$

45. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

46. $\cos x = \dfrac{\sin^2 x - \sqrt{3}\,\sin 2x}{\cos x}$

47. $4\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + \cos^2 x = 1$

48. $\sin 3x + \sin 5x = \cos x$

49. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$

50. $\sin 2x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

51. $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

52. $\sqrt{1 - \sin x} + \dfrac{2\sin x}{\sqrt{1 - \sin x}} = 0$

53. $\sin^2 2x + 3\cos^2 x = 3$

54. $\dfrac{1}{1 + \cos x} = \dfrac{1}{\cos x - 1} + \dfrac{8}{3}$

55. $\sin\left(x - \dfrac{5}{12}\pi\right) = -\cos x$

56. $\left|\cos 3x\right| = \dfrac{1}{2}$

57. $2\,(1 - \cos x) = \dfrac{\sin(\pi - x)}{1 + \cos x}$

58. $\sin^2 x - \sin x = \cos^2 x + \cos x$

59. $\sin x = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

60. $\dfrac{1-\tan^2 x}{\tan x} = \dfrac{\tan x + \tan^2 x}{2}$

61. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

62. $2\sin x\cos x + 2\cos x = 1 + \sin x$

63. $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + x\right) = \sqrt{3}\cos x - 1$

64. $\sin x + \cos x = 1$

65. $\left(2+\sqrt{2}\right)\sin^2 x + \left(2-\sqrt{2}\right)\cos^2 x + 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 2$

66. $\sin x\cos 3x = \sin 2x\cos 4x$

67. $2\cos^2 x - 5\cos x = 0$

68. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \cot x = 2\cos x$

69. $64\sin^4 x - 16\sin^2 x\cos^2 x = 1$

70. $\sin x + \sin\dfrac{x}{2} = 0$

71. $\sin^2 x + 3\cos x = 1 + \cos^2 x$

72. $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin^2 x = 0$

73. $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$

74. $\dfrac{2\sin x + 1}{\sqrt{3}\,\sin x + \cos x} = 1$

75. $\sqrt{3}\tan^2 x + \tan(\pi + x) = 0$

76. $\sqrt{3+\cos x} + \sqrt{\cos x} = \dfrac{6}{\sqrt{3+\cos(-x)}}$

77. $2\sin 2x + 1 = 0$

78. $\tan^2 x + 3\cot^2 x = 4$

79. $\cos x = \dfrac{4\sin x + 1}{\cos(-x)}$

80. $\tan(180^\circ + x) = 1$

81. $\dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{2}\sin x} = \dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

82. $\sin \dfrac{x}{3} = 0$

83. $\dfrac{5\cos x}{2\sin^2 \frac{x}{2}} + 1 = \cos x + \dfrac{11}{2}$

84. $\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

85. $\cos x = \cos 2x$

86. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = 2$

87. $\cos 8x - \cos 4x = 2\sin 6x$

88. $\tan^4 x - 4\tan^2 x + 3 = 0$

89. $\sin 2x \sin x - \sin 4x \sin 3x = 0$

90. $\cos x + 2 - \dfrac{6}{\cos x + 2} = 1$

91. $3\sin x + 7 = 0$

92. $\tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

93. $4\sin^2 x + 3\tan^2 x = 12$

94. $\cos 3x - 3 = 0$

95. $\left|\sin^2 x - 3\cos^2 x\right| = 0$

96. $2\sin x + \sqrt{3}\tan(\pi - x) = 0$

97. $3\cos^2 x + \sin^2 2x = \dfrac{5}{2}$

98. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

99. $\tan^2 \dfrac{x}{2} + \cos x = 1$

100. $\dfrac{9\cos x - 1}{1 + 2\cos x} - \dfrac{5\cos x + 2}{1 - 4\cos^2 x} = 5$

101. $\sin x + \cos x = -2$

102. $\tan(\pi - 2x) = \tan(-3x)$

103. $2\sin x \tan x = 5 - \dfrac{1}{\cos x}$

104. $2\sin(x + 20^\circ) + \sqrt{3} = 0$

105. $6 - \cos^2 x = 3\sin x\,(4 - \sin x)$

106. $\sin x = 2\tan x$

107. $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

108. $4\cos 4x - 4 = 0$

109. $2\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos x - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$

110. $\tan^2 x - \tan x = 0$

111. $\sin(2x - 4^\circ) = -\sin x$

112. $\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

113. $\tan x \sin x = \sqrt{3}\sin x$

114. $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sqrt{2}\cos^2 x$

115. $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

116. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

117. $\sin 2x = \cos x$

118. $2\sin^2 x\cos x - 2\cos x + \sin^2 x = 1$

119. $3\sin x = \sqrt{3}\cos x$

120. $\sqrt{2}\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \sqrt{3}\,(\cos x - \sin x)$

121. $\cos 6x + \cos 2x = 2\cos 4x$

122. $3\cos^2 x + \sin x = 2 - \sin^2(\pi - x)$

123. $2\cos x - 5 = 0$

124. $\sqrt{4\sin 2x - 3} + 2\sqrt{\sin 2x} = 3$

125. $\tan 4x - 1 = 0$

126. $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(x + \frac{13}{12}\pi\right)$

127. $\tan x - \cot x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

128. $\sin 2x - 2\cos x = 0$

129. $\frac{1 + \cos 2x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0$

130. $2\sin^2 x - 4\cos^2 x = -1\,.$