CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione

$$\log(x-2) + \log x = \log(9-2x)\,.$$

Svolgimento: Affinché l'equazione abbia significato bisogna imporre che gli argomenti dei tre logaritmi presenti nell'equazione siano positivi e quindi che

$$\begin{cases} x-2>0 \\ \\ x>0 \\ \\ 9-2x>0\,. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} x>2 \\ \\ x>0 \\ \\ x<9/2\,, \end{cases}$$

la cui soluzione è $2<x<9/2$.
Usando le proprietà dei logaritmi l'equazione data si può riscrivere come

$$\log\Big[x(x-2)\Big] = \log(9-2x)\ ,$$

che equivale a

$$x(x-2) = 9-2x\,.$$

Moltiplicando e sommando i monomi simili si ottiene

$$x^2-9=0\,,$$

le cui soluzioni sono $x=-3$ e $x=3$.
Poiché $x=-3<2$, tale soluzione non è accettabile. Invece $x=3$ verifica la condizione di esistenza $2<x<9/2$, quindi l'equazione data ammette come unica soluzione $x=3$.

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $\log_{\frac{4}{3}}\left(x^2-x+1\right) = -1$

2. $2\log_3 x = \log_2 \dfrac{1}{8}$

3. $\log{(x+1)} = 2\log 2$

4. $\log x - \dfrac{1}{2}\log(x^2+1) = \log(4-x) - \dfrac{1}{2}\log(x^2-8x+17)$

5. $\log\Big[\log(x^2+3)-1\Big] = e$

6. $\log^2 x + \log x - 6 = 0$

7. $\dfrac{2\log_4 -5}{2\log_4 x+1} + \dfrac{6}{\log_4 x^2 - 3} = \dfrac{7}{4}$

8. $\log_3\left(\sqrt{x-2}-1\right) = 0$

9. $\log x + \log(x+3) = 1$

10. $|\log_2 x + 1| + 4\log_2 x = -3$

11. $\log\left(4^{1-x}+2\right) - \log 2 = \log\left(2^{2x+1}-3\right)$

12. $\log\Big|\log x - 2\Big| = 0$

13. $\log 2 + \dfrac{1}{2}\Big[\log x + \log(2-x)\Big] = \dfrac{1}{2}\log 3 - \log(1-x)^2$

14. $\log_{\sqrt{2}} x = 6$

15. $\dfrac{\log(x-1)}{\log(x^3-8x+5)} = \dfrac{1}{3}$

16. $\log(x^3-x^2-2x) = \log(x+\sqrt{2}) + \log(x-\sqrt{2}) + \log(x-2)$

17. $|\log\log x| = 1$

18. $\log x + \log(x+4) = \log(9-2x)$

19. $\dfrac{6}{\log^2 x - 1} + \dfrac{3}{\log x + 1} = \dfrac{\log x + 1}{\log x - 1}$

20. $\log\sqrt{\log^2(x+1)-4} = 1$

21. $\log_3 x + 2\log_9 x = 2$

22. $\dfrac{1}{2}\log\left(3x+\sqrt{6x-1}\right) = \log(2x+1) - \dfrac{1}{2}\log\left(3x-\sqrt{6x-1}\right)$

23. $\dfrac{\log_2\left(4^{x+1}-2\right)-2x}{2x+1} = 1$

24. $\log_{\sqrt{3}} x = -4$

25. $\log x + \log(x+1) = \log(x^2 - x) + 1$

26. $\log_{\frac{1}{2}} \left(x - \sqrt{1-x^2}\right) = 0$

27. $\log(10 - 2x) = \log(5 - x) - \log 4$

28. $3 \log x = \dfrac{1}{\log x} - 2$

29. $\log\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}\right) - \log\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}\right) = \log x - \log 2$

30. $\log(2x + 11) - \log(x + 4) - \log 2 = \log(1 - 3x) - \log(1 - x)$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = \dfrac{1}{2}\Big(\log_3 2 + 1\Big) \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_3(x + y) = 0 \\ \log_2(x^2 + y^2) - \log_2 x = 1 + \log_2 y \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 126a^3 \\ \log_5 x + \log_5 y = 1 + 2\log_5 a \end{cases} \qquad a > 0$

4. $\begin{cases} 3^x + 3^y = 2 \\ \log_3(x + 2) + \log_3(2 + y) = \log_3(4 + xy) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ \dfrac{1}{2}\log(x + y) = \log\sqrt{7} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \log_a x^y = 2 \\ 2y + \log_a x = 5 \end{cases} \qquad a > 0,\ a \neq 1$

7. $\begin{cases} 2\log_2(x - y) + \log_{\frac{1}{3}}(9x) = 2 \\ 3\log_2(x - y) + 2\log_{\frac{1}{3}}(9x) = 1 \end{cases}$

8. $$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\log(x+y) = \log 3 \\ \\ \log x - 2 = \log 5 - \log y \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} \log x - \log y = 1 \\ \\ \dfrac{1}{\log x} + \dfrac{1}{\log y} = 0 \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 1 \\ \\ \log_2 3 + \log_2 x = 2 + 2\log_2 a - \log_2 y \end{cases} \qquad a > 0$$

Esercizi: Risolvere i seguenti esercizi

1. stabilire, motivando la risposta, se l'equazione
$$x^2 + 1 = -\log(x^2+1)$$
ammette soluzioni reali;

2. determinare per quali valori di $k > 0$ l'equazione
$$x^2 - (\log k + 2)\,x - \log k - 2 = 0$$
ammette due radici reali coincidenti;

3. dati gli insiemi
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \log\left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}}\right) = 0 \right\}$$
e
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, \log\left|2x-1\right| = 0 \right\},$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$;

4. date le proposizioni
$$p(x):\ \log\left(1 - \frac{1+2^x}{1-2^x}\right) = 0$$
e
$$q(x):\ \log|x+2| = 1,$$
stabilire per quali valori di x risultano false le proposizioni $p(x) \wedge q(x)$ e $p(x) \vee q(x)$ e vera la proposizione $\overline{\overline{p(x)} \wedge q(x)}$;

5. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'equazione
$$x^2 + \Big(\log k^2 + 5\Big)x + 1 = 0$$
ammette due radici reali coincidenti;

6. dati gli insiemi
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \log(x^2 - 9) = \log|1 - x|\right\}$$
e
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \log^2(2x + 1) = 0\right\} \,,$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$;

7. dati gli insiemi
$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \log|x| - 1 = 0\}$$
e
$$B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |\log x - 1| = 0\} \,,$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$;

8. date le proposizioni
$$p(x) :\; 2\log x - 3\sqrt{\log x} + 2 = 0$$
e
$$q(x) :\; \sqrt[3]{\log|x - 2|} = 0 \,,$$
stabilire per quali valori di x risultano vere le proposizioni $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$ e $\overline{p(x)} \wedge q(x)$;

9. stabilire, motivando la risposta, se l'equazione
$$|\log x| + e^x = 0$$
ammette soluzioni reali;

10. dati gli insiemi
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \Big|\log|x^2 + 5x + 6|\Big| = 0\right\}$$
e
$$B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, \log(x + 2) + \log(x + 3) - 1 = 0\} \,,$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.