CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE

EQUAZIONI LOGARITMICHE

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione

$$\log(2x+4) = 2\,.$$

Svolgimento: Affinché l'equazione abbia significato bisogna imporre che l'argomento del logaritmo presente nell'equazione sia positivo e quindi che

$$2x+4>0\,,$$

la cui soluzione è $x > -2$.
Usando la definizione di logaritmo l'equazione data si può riscrivere come

$$2x+4 = e^2\,,$$

da cui segue che

$$x = \frac{e^2-4}{2}\,.$$

Poiché $x = \left(e^2-4\right)/2 > -2$, e quindi verifica la condizione di esistenza, l'equazione data ammette come unica soluzione $x = \left(e^2-4\right)/2$.

Esercizio 2: Risolvere la seguente equazione

$$\log(x+8) = 2\log 3 - \log x\,.$$

Svolgimento: Affinché l'equazione abbia significato bisogna imporre che gli argomenti dei logaritmi presenti nell'equazione siano positivi e quindi che

$$\begin{cases} x+8>0 \\ x>0\,. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} x>-8 \\ x>0\,, \end{cases}$$

la cui soluzione è $x > 0$.
L'equazione data si può riscrivere come

$$\log(x+8) + \log x = 2\log 3\,,$$

e quindi, usando le proprietà dei logaritmi,

$$\log\Big[x(x+8)\Big] = \log 3^2\,,$$

che equivale a

$$x(x+8) = 9\,.$$

Moltiplicando e sommando i monomi simili si ottiene

$$x^2 + 8x - 9 = 0\,,$$

le cui soluzioni sono $x = -9$ e $x = 1$.
Poiché $x = -9 < 0$, tale soluzione non è accettabile. Invece $x = 1$ verifica la condizione di esistenza $x > 0$, quindi l'equazione data ammette come unica soluzione $x = 1$.

Esercizio 3: Risolvere la seguente equazione

$$\log_2 x + 3\log_4 x = 10\,.$$

Svolgimento: Affinché l'equazione abbia significato bisogna imporre che gli argomenti dei logaritmi presenti nell'equazione siano positivi e quindi che

$$x > 0\,.$$

Poiché nell'equazione compaiono due logaritmi in basi diverse, per risolverla conviene portare i due logaritmi ad una stessa base, ad esempio 2.
Dalla formula del cambiamento di base si ha

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}\,,$$

e quindi l'equazione data si può riscrivere come

$$\log_2 x + 3 \cdot \frac{\log_2 x}{2} = 10\,.$$

Sommando i termini simili si ottiene

$$\frac{5}{2}\log_2 x = 10\,,$$

da cui segue

$$\log_2 x = 4\,,$$

che è verificata se $x = 16$.
Essendo $x = 16 > 0$, la condizione di esistenza è verificata e quindi l'equazione data ammette come unica soluzione $x = 16$.

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $\log_3 x^2 = 6$
2. $\log_5 x = \frac{1}{3}$
3. $\log\left(x - \sqrt{x-1}\,\right) = 0$
4. $2\log_{\frac{2}{3}}(x-1) = -2$
5. $\log_3(x^2 + x) - \log_3(x^2 - x) = 1$
6. $\log|x-2| = 0$

7. $(\log_2 x - 1)\left(\log_2 \sqrt{x} - \log_2 x + 1\right) + 6 = 0$

8. $2\log(x+3) = \log(x-1) + 4\log 2$

9. $\frac{1}{3}\log(x^3 - 8x + 5) = \log(x-1)$

10. $\log|3-2x| = 2$

11. $\log_5(x^2-4) - \log_5(x+2) = 2$

12. $\frac{\log(7-6x)}{\log x} - 2 = 0$

13. $\log_3(3x-4) = 2$

14. $\frac{1}{2}\left[\log\left(\sqrt{2}x - 1\right) + \log\left(\sqrt{2}x + 1\right)\right] = \log\left(x^2+1\right) - \frac{1}{2}\Big[\log\left(x-1\right) + \log\left(x+1\right)\Big]$

15. $2\log x - \log(2x+1) + \log 3 = \log(x-2)$

16. $\log^2 x + \log x - 2 = 0$

17. $\frac{\log\sqrt{x} + 2}{3\log\sqrt{x}} = 2 - \log\sqrt{x}$

18. $\log_6(2x-3) = 0$

19. $\frac{5}{\log x + 4} - \frac{3}{\log x - 2} = 4$

20. $\log_6(9x^2-1) - \log(3x-1) = 1$

21. $x\log 3 + \log\left(2\cdot 3^x - 3\right) + \log 5 = 3\log 3 + \log\left(2 - 3^{x-2}\right)$

22. $\log_4(x+6) + \log_4 x = 2$

23. $\log_2|2x^2 - x| + \log_2 \frac{1}{3} = 0$

24. $\log(x-1) = 3$

25. $\frac{\log 9}{2\log(x-1)} = 1$

26. $\log(x^2 - x + 2) - \log(2x-3) = \log(x+2)$

27. $\log(1-x) - \log(1+x) + \frac{1}{2}\Big[\log(1+2x) - \log(1-2x)\Big] = 0$

28. $\log_2(x^2 + 3x + 4) = 2$

29. $\dfrac{\log x + 1}{\log x - 1} + \dfrac{\log x - 1}{\log x + 1} = \dfrac{2}{\log^2 x - 1}$

30. $2\log_2 x = 2 + \log_2(x-1)$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ \log x + \log y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2\log y + \log(x+y) = 2\log(x+y) \\ 2\log_2 x + \log_2(x+y) = 2 + 2\log_2(x+y) \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log(2x+3) + \log 3 = \log(6x^2) + 2\log 2 \\ \log(9-2x) + \log(y-1) = \log 2 + \log(2 - xy - 4x) \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_2 x - 2 = \log_2 \dfrac{32}{y} \\ x + y = 24 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \log x + \log y = \log 15 \\ x + y = 8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2\Big[\log_2(3x-y) - \log_2 3\Big] = \log_2(x-y) + 3 \\ 2\log_2(x+y) = 5 + \log_2(x-y) \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ \log_2(2x-y) = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2\Big[\log(3x-y) - \log 3\Big] = \log(x-y) + 3 \\ \log(x+y) = 5 + \log(x-y) \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2\log(x+5) - \log(y+2) = 1 \\ 1 + \log_2 x = \log_2(2+y) \end{cases}$

10. $\begin{cases} \log_6(3^{2x+1} + 3^{y+1}) - \log(3^{y-x} + 6) = 1 \\ 9^x = 3^y \end{cases}$

11. $$\begin{cases} \dfrac{\log(y-1)+2\log 3}{\log(x+3)} = \log(9y-9) \\ \\ \log x + \log y = 0 \end{cases}$$

12. $$\begin{cases} y-1 = \log_6(x+3) \\ \\ \log_6(x+4) = 2-y \end{cases}$$

13. $$\begin{cases} \log x + \log y - \log(x^2+y^2) + \log 2 = 0 \\ \\ \left(x^2+y^2+1\right)^2 - 3\left(x^2+y^2\right) = 1 \end{cases}$$

14. $$\begin{cases} \log_2 y + \log_3(x+1) = 2 \\ \\ \log_2 y - \log_3(x+3) = 1 \end{cases}$$

15. $$\begin{cases} \log x + 2\log y = 1 \\ \\ \dfrac{3\log x}{\log^2(x+y)} - \log x^3 = 0 \end{cases}$$