CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione

$$\frac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1}\,.$$

Svolgimento: Dividendo il primo e il secondo membro per 3^{x+1} l'equazione data si può riscrivere nella forma

$$\frac{2^{x+2}}{3 \cdot 3^{x+1}} = 1$$

e quindi come

$$\frac{2^{x+2}}{3^{x+2}} = 1\,.$$

Allora si ha

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+2} = 1$$

che equivale a

$$x + 2 = 0\,,$$

la cui unica soluzione è $x = -2$.

Esercizio 2: Risolvere la seguente equazione

$$9^x = 6 + 3^x\,.$$

Svolgimento: Poiché $9 = 3^2$, l'equazione data si può riscrivere nella forma

$$\left(3^2\right)^x - 3^x - 6 = 0\,.$$

Ponendo $y = 3^x$, tale equazione diventa

$$y^2 - y - 6 = 0\,,$$

le cui soluzioni sono $y = -2$ e $y = 3$.
Quindi l'equazione data è equivalente a

$$3^x = -2 \quad \vee \quad 3^x = 3\,.$$

L'equazione

$$3^x = -2$$

non ha soluzioni, poiché la funzione esponenziale è sempre positiva, mentre

$$3^x = 3$$

ammette come unica soluzione $x = 1$.
Allora l'equazione data ammette come unica soluzione $x = 1$.

Esercizio 3: Risolvere la seguente equazione

$$2^{\sqrt{x}+2} + 2^{2-\sqrt{x}} = 17 \,.$$

Svolgimento: L'equazione data ha senso solo se $x \geq 0$. Inoltre si può scrivere nella forma

$$4 \cdot 2^{\sqrt{x}} + \frac{4}{2^{\sqrt{x}}} = 17 \,.$$

Ponendo $y = 2^{\sqrt{x}}$ si ottiene

$$4y + \frac{4}{y} = 17 \,.$$

Facendo il minimo comune multiplo e tenendo conto del fatto che $y \neq 0$ si ha

$$4y^2 - 17y + 4 = 0 \,,$$

che ammette come soluzioni $y = 1/4$ e $y = 4$.
Quindi l'equazione data è equivalente a

$$2^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4} \quad \vee \quad 2^{\sqrt{x}} = 4 \,.$$

Poiché $1/4 = 2^{-2}$ l'equazione

$$2^{\sqrt{x}} = \frac{1}{4}$$

si può riscrivere come

$$2^{\sqrt{x}} = 2^{-2}$$

che equivale a

$$\sqrt{x} = -2$$

che non ammette soluzioni reali essendo $\sqrt{x} \geq 0$ e $-2 < 0$.
L'equazione

$$2^{\sqrt{x}} = 4$$

si può scrivere come

$$2^{\sqrt{x}} = 2^2$$

che equivale a

$$\sqrt{x} = 2 \,,$$

la cui unica soluzione è $x = 4$.
Allora l'equazione data ammette come unica soluzione $x = 4$.

Esercizio 4: Risolvere la seguente equazione

$$3^{x-1} = 7^{x+1} \,.$$

Svolgimento: Entrambi i membri dell'equazione sono positivi, quindi, per risolverla, si può passare ai logaritmi. Passando al logaritmo naturale si ha

$$\log\left(3^{x-1}\right) = \log\left(7^{x+1}\right) \,,$$

da cui, usando le proprietà dei logaritmi, segue che

$$(x-1)\log 3 = (x+1)\log 7 \,.$$

In questo modo l'equazione data è diventata un'equazione algebrica: sommando i monomi simili si ottiene

$$x\,(\log 3 - \log 7) = \log 7 + \log 3 \,,$$

la cui unica soluzione è

$$x = \frac{\log 7 + \log 3}{\log 3 - \log 7}\ .$$

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $3^{x-3} = 9^{-x}$
2. $\sqrt{2\sqrt{2}} = 4^{1-x}$
3. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}} = \sqrt{8^x}$
4. $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{2x+1} = 1\,,\quad a > 0$
5. $81 \cdot 9^x = 9^{15/x}$
6. $\dfrac{5^x - 4}{5^x - 1} + \dfrac{4}{25^x - 5^x} = 0$
7. $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt[3]{4^{1-x}} = 8$
8. $\dfrac{9^{x+1}}{27^{3-2x}} = \dfrac{3^{1+x}}{81}$
9. $\dfrac{3^{x-1}}{25}\sqrt{3} = \sqrt{125^x\ \sqrt[3]{3^{x-1}}}$
10. $4^x + 2^{x+2} - 12 = 0$
11. $\left|\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2} - 1\right| = 0$
12. $\dfrac{1 - 2^{x+1}}{2^x} + \dfrac{3 + 6 \cdot 2^x}{2^x + 2} = \dfrac{11}{4^x + 2^{x+1}}$
13. $\dfrac{\sqrt[6]{9^{4+x}}}{32\sqrt[3]{81^{1-2x}}} = 8^{x-2}\sqrt[3]{12}$
14. $\dfrac{2^{2x}}{1 + 2^x} = 1 - \dfrac{2^x}{2^x + 1}$
15. $a^{1-x} = b^2 \quad a > 0\,,\ a \neq 1\,,\ b \neq 0$
16. $\dfrac{\left(3^{x+1}\right)^{2x-1} \cdot 27^{1-x}}{9^{2-x}} = 1$

17. $\sqrt{3^{x-1}} + 7 \cdot 2^{x+1} = \dfrac{2^{x+1}\sqrt{3^x}}{\sqrt{3 \cdot 4^{x-2}}}$

18. $7^{1-x} + 7^{2-x} = 49^{x+1/2} + 49^{x+1}$

19. $\dfrac{\sqrt[3]{4^{x+1}} \cdot 2^{x-1}}{\sqrt{2^x}} = \dfrac{1}{4}$

20. $\dfrac{3^{|x^2-4|}}{\sqrt{2^{3x}}} = \dfrac{2^{|x^2-4|}}{\sqrt{3^{3x}}}$

21. $5^{2x} + 7^x = 0$

22. $\dfrac{1}{4^{2x}+4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{4^x - 2}{2^{4x+1} + 8}$

23. $3^{2x+1} + 26 \cdot 3^x - 9 = 0$

24. $\dfrac{\sqrt[3]{32^x}}{\left(2^{x+2}\right)^{x-2}} = 1$

25. $\dfrac{2^x \cdot 15}{9} = 40 \cdot 3^{x-4}$

26. $3^{x+1} - \dfrac{3^x}{9} + 3^x = 35$

27. $\left(9^{x+1}\right)^{2x-1} \cdot 3^{x-2} = \dfrac{1}{3}$

28. $\dfrac{1}{4^{1-3x}} + 2^{3x+1} = \dfrac{1}{4^{2-3x}} + 2^{3x+3}$

29. $\dfrac{2}{1-3^x} + \dfrac{6}{9^x - 1} + \dfrac{2}{3^x + 1} = \dfrac{1}{3^{-x} + 1}$

30. $2^{2x} + 2^{x+1} - 8 = 0$

31. $2\left(5^x - \dfrac{5^x - 1}{5^x + 1}\right) = 3 \cdot 5^x - 1$

32. $2^x + 3^x = \dfrac{2^x}{3} + \dfrac{3^x}{2}$

33. $\dfrac{8 - 9^x}{1 + 3^{3-2x}} + \dfrac{1}{4} = 0$

34. $\left|7^{|x|+5} - 7\right| = 0$

35. $\dfrac{9^{x+1/2} + 3^{2x-1}}{5^{x+1}} = 2$

36. $\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x+1} + \left(\dfrac{2}{5}\right)^{x-1} = \dfrac{29}{4}$

37. $6^x - 3^x - 3 \cdot 2^x + 3 = 0$

38. $|x| + 2^x = 0$

39. $\dfrac{\sqrt[5]{a^{2x-2}} \cdot \sqrt[3]{a^x}}{a \cdot \sqrt{a^{3-3x}}} = 1\,, \quad a > 0$

40. $4^{x-1} = 5 - 4^{2-x}$

41. $5^{2|x-3|} + 4 \cdot 5^{|x-3|} + 4 = 0$

42. $a^{x+1} \sqrt[3]{b^{2x-1}\sqrt{a^x}} = \sqrt{b^{2x}} \cdot \sqrt[6]{a^{2x+1}}\,, \quad a, b > 0$

43. $\left(2^x - 16^{2-3x}\right)^2 + \left(169x^2 - 64\right)^8 = 0$

44. $\dfrac{\left|x^2 + 3x\right|}{x} + 3^x = 0$

45. $8^{3x} + 2 = 0$

46. $\dfrac{3^{x+1} + 3^{x-2}}{4} = 7 \cdot \sqrt[5]{9^{x+3}}$

47. $18\left(\dfrac{3^{x+1}}{2} - 1\right) = \dfrac{7 \cdot 3^{2x+1}}{3^x}$

48. $\sqrt{\dfrac{12^{|x^2-1|}}{3^{|(x-1)(x+1)|}}} = 2^{|x^2-1|}$

49. $\dfrac{9^{|x^2-5|}}{3^{2x}} = 2^{|x^2-5|-x}$

50. $\dfrac{8 - 9^x}{1 + 3^{3-2x}} + \dfrac{1}{4} = 0$

51. $\dfrac{\sqrt{2^{x-2}} + \sqrt{2^{4-x}} + 4}{\sqrt{2^{6-x}} + \sqrt{2^{x-2}}} = \dfrac{7}{4}$

52. $\dfrac{32^{x+2}}{4^x} \cdot \left(2^{x+1}\right)^{1/x} = 32^{x+2}$

53. $8 + 2^{(6-x)/x} = 4\left(3 - 2^{(3-2x)/x}\right)$

54. $\dfrac{36 - 3^{1+x}}{3^{2x}} = 5 \cdot 3^{1-x}$

55. $7^{|x+3|} + 7^{-|x+3|} = 1$

56. $1 - \dfrac{1 + 2^x}{1 - 2^x} = 0$

57. $28 - 5^{4/x} = \dfrac{1}{3}\left(4 + 5^{2/x}\right)$

58. $7^{|x^2-x|} + 3\sqrt[3]{\left(7^{|x^2-x|}\right)^2} + 3\sqrt[3]{7^{|x^2-x|}} + 1 = 0$

59. $12^x - 3 \cdot 4^x - 5 \cdot 3^x + 15 = 0$

60. $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x + \left(\sqrt{2} + 1\right)^x = 2\sqrt{2}$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} x + 3^y = 0 \\ x + 9^y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^{x+3y} = \dfrac{a^2}{a^{2x-y}} \\ \dfrac{b^2}{b^{x-2y}} = b^{3-2y+x} \end{cases} \qquad a, b > 0$

3. $\begin{cases} |x^2 + 3y| + 2^{|x^2+3y|} = 0 \\ 2^{|x|y} = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 9^{xy} + 1 = 0 \\ \dfrac{5}{5^{x-3}} = 25^y \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3^{x-y} = 3 \\ 4^x \cdot 2^y = \dfrac{1}{16} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7^{1-x} : 49^{2+y} = 1 \\ \\ a^{2x+y} : a^{x-3y} = a^2 \end{cases} \qquad a > 0$

7. $\begin{cases} 6^{(x-1)y} = \dfrac{3^{xy}}{3^y} \\ \\ |(x-1)y| = 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \left| 4^{|xy|} - \dfrac{1}{4} \right| = 0 \\ \\ 2^{|x|} \cdot 4^{|y|} = 2 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 8^x \cdot 4^y = 128 \\ \\ 81^y = 27 \cdot 3^x \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3^x - 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^y + 1 = 0 \\ \\ 3^{x+1} - 6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^y + \dfrac{5}{3} = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 3x = 5^y \\ \\ 5x = 3^y \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{7^{|x^2+3y+2|}}{3} = \sqrt{9^{|x^2+3y+2|-2}} \\ \\ |x^2 + 3y + 2| = 1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} y^2 + y + 1 + 2^{-x} = 0 \\ \\ 6^{y-x} = 1 \end{cases}$

14. $\begin{cases} (7^y + 3)\left(4^{x+y} - 16\right) = 0 \\ \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{8^{|2x-1|}}{2^{x^2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{y+3} \\ \\ 2^{x+y} - \sqrt{2^{x+y}} = 0 \end{cases}$

Esercizi: Risolvere i seguenti esercizi

1. stabilire, motivando la risposta, se l'equazione
$$3^x = -x^2 + 3x - 8$$
ammette soluzioni reali;

2. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$x^2 - \left(2^{k+1} - 1\right) x - 2^{k+1} + 1 = 0$$
ammette due radici reali coincidenti;

3. dati gli insiemi
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \left|3^{x+2} - 1\right| = 0\right\}$$
e
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 7^{|x|+2} = 1\right\},$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$;

4. date le proposizioni
$$p(x):\ 3^{2x-5} + 5 = 0$$
e
$$q(x):\ 7^x - 7 = 0,$$
stabilire per quali valori di x risulta falsa la proposizione $p(x) \wedge q(x)$ e vera la proposizione $\overline{p(x) \wedge \overline{q(x)}}$;

5. dati gli insiemi
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \frac{5^{x^2-2x}}{7^{x^2}} = \frac{7^{1-2x}}{5}\right\}$$
e
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 2^{x-x^2} = 1\right\},$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$;

6. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$3^k x^2 + 2 \cdot 3^k x + 3^k - 1 = 0$$
ammette due radici reali coincidenti;

7. dati gli insiemi
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 3^{|x|} - 1 = 0\right\}$$
e
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, 4^{|x|} = 2\right\},$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$;

8. stabilire, motivando la risposta, se l'equazione
$$5^x = 1 - x^2$$
ammette soluzioni reali;

9. date le proposizioni
$$p(x): \ 2^x - 3\sqrt{2^x} + 2 = 0$$
e
$$q(x): \ \sqrt[3]{5^{|x-2|}} = 1\,,$$
stabilire per quali valori di x risultano false le proposizioni $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$ e $\overline{p(x)} \wedge q(x)$;

10. dati gli insiemi
$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, \left| 9^{|x+4|} \right| = 3 \right\}$$
e
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} \, : \, 2^{|x|} - 3 = 1 \right\} \, ,$$
determinare gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$.