CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE

EQUAZIONI ESPONENZIALI

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione

$$4^x = 8\,.$$

Svolgimento: Essendo $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$, l'equazione data si può riscrivere nella forma

$$\left(2^2\right)^x = 2^3$$

da cui si ottiene

$$2^{2x} = 2^3\,.$$

Poiché al primo e al secondo membro ci sono due esponenziali con la stessa base, per risolvere l'equazione basta uguagliare i rispettivi esponenti. Allora si ottiene

$$2x = 3$$

la cui unica soluzione è $x = 3/2$.

Esercizio 2: Risolvere la seguente equazione

$$3^{2-8x} = 9^{3x+1}\,.$$

Svolgimento: Essendo $9 = 3^2$, l'equazione data si può riscrivere nella forma

$$3^{2-8x} = \left(3^2\right)^{3x+1}$$

da cui si ottiene

$$3^{2-8x} = 3^{6x+2}\,.$$

Poiché al primo e al secondo membro ci sono due esponenziali con la stessa base, per risolvere l'equazione basta uguagliare i rispettivi esponenti. Allora si ottiene

$$2 - 8x = 6x + 2$$

la cui unica soluzione è $x = 0$.

Esercizio 3: Risolvere la seguente equazione

$$4^x - 2^{2x+1} = 2^{2x-1} - 6\,.$$

Svolgimento: L'equazione data si può riscrivere nella forma

$$(2^2)^x - 2^{2x} \cdot 2 - \frac{2^{2x}}{2} = -6$$

da cui si ottiene

$$2^{2x} - 2^{2x} \cdot 2 - \frac{2^{2x}}{2} = -6\,.$$

Mettendo in evidenza 2^{2x} al primo membro si ha

$$2^{2x}\left(1-2-\frac{1}{2}\right)=-6\,,$$

da cui segue

$$-\frac{3}{2}\cdot 2^{2x}=-6$$

e quindi

$$2^{2x}=4\,,$$

la cui unica soluzione è $x=1$, essendo $4=2^2$.

Esercizio 4: Risolvere la seguente equazione

$$2^{x+3}=64\cdot 3^{x-3}\,.$$

Svolgimento: Poiché $64=2^6$ l'equazione data si può riscrivere nella forma

$$2^{x+3}=2^6\cdot 3^{x-3}\,.$$

Dividendo il primo e il secondo membro di tale equazione per 2^6 si ha

$$\frac{2^{x+3}}{2^6}=3^{x-3}$$

da cui si ottiene

$$2^{x+3-6}=3^{x-3}$$

e quindi

$$2^{x-3}=3^{x-3}\,.$$

Dividendo entrambi i membri per 3^{x-3} si ottiene

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-3}=1\,,$$

che, per le proprietà della funzione esponenziale, è verificata se

$$x-3=0$$

e quindi se $x=3$.

Esercizio 5: Risolvere la seguente equazione

$$3^{1-x}=16\,.$$

Svolgimento: Poiché 16 non si può scrivere come potenza di 3, per risolvere l'equazione data bisogna passare ai logaritmi (ciò è possibile essendo $3^{1-x}>0$ e $16>0$). Allora si ha

$$\log_3\left(3^{1-x}\right)=\log_3 16\,,$$

da cui, usando le proprietà dei logaritmi, segue che

$$(1-x)\log_3 3=\log_3 16\,,$$

e quindi, essendo $\log_3 3=1$,

$$1-x=\log_3 16\,.$$

In questo modo l'equazione data è diventata un'equazione algebrica la cui unica soluzione è

$$x=1-\log_3 16\,.$$

Quindi l'equazione data è verificata se $x=1-\log_3 16$.

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $3^x = 3^{2x-1}$
2. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 = \frac{8}{27}$
3. $3^{-3x} = \frac{1}{9}$
4. $\frac{2^{x-1} \cdot 4^{1+x}}{3} 0 = 6^{1-x}$
5. $\frac{2^{2x-1} + 3}{2^x + 1} = 2^x - \frac{1}{3}$
6. $5^{|x|} - 1 = 0$
7. $5^{2x-3} = 4$
8. $\left(a^{2x}\right)^3 = a^{x^2}\,, \quad a > 0$
9. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^{x+1}\right] \cdot \frac{27}{2} = \frac{4^{x-1}}{9^x}$
10. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 7$
11. $\frac{3^{x^2+5}}{27^{2x}} = \frac{1}{3^{x+1}}$
12. $\frac{3^{x-1} \cdot 4^{x+1}}{5^x} = 2$
13. $3^x \cdot 2^{1-x} = 18$
14. $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1\right| = 0$
15. $(2^x + 2)(9^x - 3) = 0$
16. $\sqrt[3]{25^{1-x}} = \sqrt{5}$
17. $\frac{5 \cdot 2^{1-x}}{4^{1-x}} = 1$
18. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \left[\left(\frac{4}{9}\right)^{-2}\right]^{-3}$

19. $49 = 7^{x+1}$

20. $\dfrac{|x-1|}{x-1} + 2^{|x|} = 1$

21. $\dfrac{2}{4^x - 4} - \dfrac{1}{4^x - 2^{x+1}} + \dfrac{2^x - 4}{2^{2x} + 2^{x+1}} = 0$

22. $3^{x-2} \cdot 5^{x-2} = 1$

23. $18^{x+1} = 3\sqrt{2}$

24. $9 \cdot 3^{2x} = 5^{x+1}$

25. $2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|+2} - 2 = 0$

26. $2^{2x+4} \cdot 3^x = \dfrac{2}{3^{x+3}}$

27. $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

28. $\dfrac{12^{1-x}}{3^{x+1}} = \dfrac{\sqrt{4^{1+3x}}}{6^{x+2}}$

29. $7^{|x+3|} = 49^x$

30. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-1} = 7$

31. $9^x = 27$

32. $10^x = 0,01$

33. $\dfrac{4^{x+1} - 61}{4^{x-2}} = 3$

34. $3^{2+\sqrt{x}} + 3^{1+\sqrt{x}} - 3^{\sqrt{x}} = 99$

35. $4^{x-1} = \dfrac{1}{2^{x-x^2}}$

36. $6^{2|x|} - \left(\dfrac{1}{36}\right)^{x^2-3} = 0$

37. $3^x \cdot 5^{x-2} = 9$

38. $\sqrt{49^{x+1}} + 7^{x-1} = 5^x$

39. $\dfrac{2^{x+1} \cdot 5^{x-1}}{3^x} = 2$

40. $6^{x+1}+6^{x-1}+6^{x}=\dfrac{43}{6^{x-2}}$

41. $\dfrac{5^{1-2x}+\sqrt{25^{3-2x}}}{2^{2x-1}+2^{2x-3}}=4$

42. $3^{x}+2^{x}=0$

43. $\dfrac{1}{7^{x}+1}+\dfrac{7^{x}}{49^{x}-1}=\dfrac{2\cdot 7^{x}-1}{7^{x}-1}$

44. $\sqrt{18^{|x|}:3^{|x|}}=(6^{x})^{3}$

45. $\sqrt[3]{a^{2}}=a^{1-x}\,,\quad a>0$

46. $9^{x}=3$

47. $81^{x+1}\cdot\sqrt[3]{9^{2-x}}=\dfrac{\left(3\sqrt[4]{3^{2x-1}}\right)^{2}}{\sqrt{27^{x+1}}}$

48. $3^{2x}-3^{x}-6=0$

49. $(4^{x}-8)\,(3^{x}+81)\left(5^{x}-\dfrac{1}{125}\right)=0$

50. $7^{x}=\dfrac{5^{x+1}}{7}$

51. $\dfrac{2^{|x^{2}-5x+6|}}{4^{x}}=2\cdot 2^{3x}$

52. $\sqrt{3^{x}}-9=8\sqrt[4]{3^{x}}$

53. $21^{x-1}=15^{x}$

54. $3^{x}+\dfrac{6}{3^{x}}=\dfrac{29}{3}$

55. $\dfrac{2^{x-1}\,\sqrt[3]{5}}{\sqrt{10}}=5^{1+x}$

56. $2^{x}\cdot 4=\dfrac{1}{4}$

57. $27^{x}=\dfrac{1}{3}$

58. $\dfrac{3^{2x}+2\cdot 3^{x}+1}{3^{x+2}-3^{x}}=\dfrac{2}{3}$

59. $2^{2x-1}+2^{2x+1}=4^{x}+6$

60. $\sqrt[3]{\dfrac{7^{6x}\cdot 8}{7^{3(x-3)}}} = 2\left(\dfrac{1}{7}\right)^{|x+3|}$

61. $4^x = \dfrac{1}{2}$

62. $2^{x+1} = 5^{1-x}$

63. $9^{x+1} = \dfrac{3^{x+1} - 3^{x+2}}{2}$

64. $5^x\left(2 - 5^x\right) = 1$

65. $\dfrac{7^{x+1}}{5} = 3^{2x-1}\sqrt[4]{4^{1+3x}}$

66. $\sqrt{8^x} = \dfrac{1}{4}$

67. $3^x + 3^{x+1} = 4^x$

68. $2^{x-4} - \dfrac{13\cdot 5^{x-3}}{5} = \dfrac{2^x}{3} - \dfrac{52\cdot 5^{x-4}}{3}$

69. $9^x + 6\cdot 3^x - 27 = 0$

70. $3^{|x+5|} - \dfrac{x+7}{2|x+7|} + \dfrac{1}{2} = 0$

Esercizio 5: Risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ \\ 7^{xy} = 49\,. \end{cases}$$

Svolgimento: Il sistema dato si può riscrivere come

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 5^3 \\ \\ 7^{xy} = 7^2 \end{cases}$$

e quindi risulta equivalente a

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \\ xy = 2\,. \end{cases}$$

Usando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ \\ x(3-x) = 2\,. \end{cases}$$

Svolgendo il prodotto si ottiene

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ x^2 - 3x + 2 = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado presente nel sistema ammette come soluzioni $x = 1$ e $x = 2$, quindi il sistema risulta equivalente a

$$\begin{cases} y = 3 - x \\ x = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 3 - x \\ x = 2 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2\,. \end{cases}$$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x+y} = 81 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4^{x+1} \cdot 8^y = 1 \\ 25^x = 5 \cdot 125^{2y} \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{2^{x-1}}{4^{1+y}} = 16 \cdot 8^{x+y} \\ \dfrac{5}{25^{x+y}} = \dfrac{1}{5^{6x}} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sqrt[3]{2^x} \cdot \sqrt{8^{x-2y}} = 1 \\ \sqrt{3^{x-y}} \cdot \sqrt[5]{9^{1-y}} = 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2^{x+1} = 3y \\ 3^{x+1} = 2y \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2^x + y^2 = 0 \\ 3^{x+y} \cdot 9 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$

7. $\begin{cases} y^2 - 3x = 0 \\ \dfrac{25^{x-1}}{5} = 5^y \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y - 2^x = 0 \\ 2y^2 + 4^{x+1} = 9\sqrt{2^{3x-1}} \end{cases}$

9. $\begin{cases} 81^x = 27 \cdot 3^y \\ \dfrac{125^y}{25^x} = 5 \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{a^x}{a^{3y}} = a^4 \\ b^{2x} = \dfrac{b^{15}}{b^y} \end{cases} \qquad a, b > 0$

11. $\begin{cases} 2^{x-2y} = 16 \\ 3^{x^2} \cdot 3^{y^2} = 81 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3^{x+5} + 27y = 28 \\ 9^x - y + 2 \cdot 3^{2x} = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} \sqrt{5^{1-x}} \cdot \sqrt[3]{5^{x+4y}} = 25 \\ 8\sqrt[4]{2^x} : \sqrt[3]{4^{2+y}} = \sqrt{2} \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2^{x^2-y^2} = 128 \\ x + y = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{7^{x+|y|} \cdot 9}{3^{|y|}} = 3^{x+2} \\ x + |y| = 0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2^{x+y} = 16 \\ 2^{xy} = 8 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 9^x \cdot 3^y = 3 \\ \left(2^{x^2}\right)^4 \cdot 2^{y^2} = 2^{13} \end{cases}$

18. $$\begin{cases} 49^{|x+2|} \cdot 7^y = 1 \\ \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3 \cdot 3^{|x-1|}}{9^y}} = 3^{x-y} \\ \\ 5^{xy} = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{4^{|x|+2y} \cdot 3^{-|x|}}}{3^{2y}} = \sqrt{3^{|x|}} \\ \\ |x| + 2y = 2 \end{cases}$$