

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SU

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI
DI PRIMO GRADO
CON IL VALORE ASSOLUTO

Esercizio 1: Risolvere la seguente equazione

$$|x - 1| = 4 - 2x.$$

Svolgimento: Per definizione di valore assoluto si ha

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 1 \\ -(x - 1) & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Quindi se $x \geq 1$ allora l'equazione data è equivalente a

$$x - 1 = 4 - 2x,$$

da cui si ottiene

$$3x = 5$$

la cui unica soluzione è $x = 5/3$. Poiché $5/3 > 1$ tale soluzione è accettabile.

Se $x < 1$ allora l'equazione data equivale a

$$-(x - 1) = 4 - 2x,$$

da cui si ha

$$-x + 1 = 4 - 2x$$

la cui unica soluzione è $x = 3$. Essendo $3 > 1$ tale soluzione non è accettabile.

Quindi l'equazione data ammette come unica soluzione $x = 5/3$.

Esercizio 2: Risolvere la seguente equazione

$$|x - 4| + x = |1 - x|.$$

Svolgimento: Innanzitutto studiamo il segno degli argomenti dei due moduli:

$$x - 4 \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \geq 4 \\ < 0 & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

e

$$1 - x \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \leq 1 \\ < 0 & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si presentano tre diversi casi.

- Caso 1: $x < 1$

L'equazione data è equivalente a

$$-(x - 4) + x = 1 - x$$

la cui unica soluzione è $x = -3$. Poiché $-3 < 1$, tale soluzione è accettabile.

- Caso 2: $1 \leq x \leq 4$

L'equazione data è equivalente a

$$-(x - 4) + x = -(1 - x)$$

la cui unica soluzione è $x = 5$. Poiché $5 > 4$, tale soluzione non è accettabile.

- Caso 3: $x > 4$

L'equazione data è equivalente a

$$x - 4 + x = -(1 - x)$$

la cui unica soluzione è $x = 3$. Poiché $3 < 4$, tale soluzione non è accettabile.

Allora l'unica soluzione dell'equazione data è $x = -3$.

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $x + 2|x| - 3 = 0$

2. $|x| - 2|x + 3| = 0$

3. $|x - 2| - |5 - x| = 0$

4. $\frac{|x| - 4}{|x|} = 2$

5. $2 + |3 + 4x| = x$

6. $\frac{3}{|5x + 3|} = \frac{2}{x + 1}$

7. $x + 3 + |x| - |2x + 3| = 0$

8. $|x + 1| = \frac{a}{|x|}$, $a \in \mathbb{R}$

9. $\frac{|x - 2|}{x} = \frac{x}{1 + |x - 2|}$

10. $|x - 2 + |x + 3|| = 1$

11. $|2 + 3x - |x - 1|| = 2$

12. $2 - |x - 1| + 3|x - 4| = 0$

13. $\frac{x}{|x - 2|} = \frac{|x + 1|}{3}$

14. $||x - 2| - |x - 4|| = x$

15. $|2 - |x|| = x - 3$
16. $|x + |x - 1|| + 3|1 - x| = x$
17. $|2x - a| = a - 1, \quad a \in \mathbb{R}$
18. $\frac{|x - 1|}{x} = 3$
19. $1 - |x - 5| = 2x$
20. $|x - 3| + |x| = -2$

Esercizio 3: Risolvere la seguente disequazione

$$|x - 2| + 3x > 5.$$

Svolgimento: Ricordando che

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

la disequazione data equivale a

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 2 + 3x > 5 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2 - x + 3x > 5, \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 4x > 7 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 2 \\ 2x > 3. \end{cases}$$

Il primo sistema ha come soluzione $x \geq 2$, mentre il secondo ha come soluzione $\frac{3}{2} < x < 2$.

Allora la disequazione data è verificata per $x > \frac{3}{2}$.

Esercizio 4: Risolvere la seguente disequazione

$$|x - 2| + |x - 1| - 2|x - 4| - x + 2 \geq 0.$$

Svolgimento: Innanzitutto studiamo il segno degli argomenti dei diversi moduli presenti nella disequazione:

$$x - 2 \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \geq 2 \\ < 0 & \text{se } x < 2, \end{cases}$$

$$x - 1 \quad \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \geq 1 \\ < 0 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

$$x - 4 \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x \geq 4 \\ < 0 & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

Si presentano quattro diversi casi secondo che sia $x < 1$, oppure $1 \leq x \leq 2$, oppure $2 < x < 4$, oppure $x \geq 4$. Pertanto la disequazione data è equivalente a

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x < 1 \\ -(x-2) - (x-1) - 2[-(x-4)] - x + 2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -(x-2) + x - 1 - 2[-(x-4)] - x + 2 \geq 0 \end{cases} \\ & \cup \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x - 2 + x - 1 - 2[-(x-4)] - x + 2 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 4 \\ x - 2 + x - 1 - 2(x-4) - x + 2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Tali sistemi si possono riscrivere come

$$\begin{cases} x < 1 \\ x \leq -3 \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x \geq 5 \end{cases} \cup \begin{cases} 2 < x < 4 \\ x \geq 3 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 7 \end{cases}$$

ed hanno come soluzione $x \leq -3$, \emptyset , $3 \leq x < 4$ e $4 \leq x \leq 7$ rispettivamente. Allora la disequazione data è verificata se $x \leq -3$ oppure $3 \leq x \leq 7$.

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $|2x + 3| < 2x - 1$
2. $\frac{1}{|x|} + 4 > 0$
3. $\frac{|x+1|+3}{|x-6|} > 0$
4. $\frac{1}{1+|x|} > -|x-4|$
5. $|x-3| + 2|x| > 0$
6. $|2x-3| > |x+1|$
7. $|2x-1+|x-2|| > 1$
8. $|3x-7| > -5$
9. $\left| \frac{x}{2x+1} \right| - 2 < 0$
10. $|3+4x| > 2$
11. $1 + \left| \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \right| > 0$

12. $|x| + 2|x - 1| > 1 - x$

13. $\frac{1}{|x|} > \frac{2}{3}$

14. $|x - 3| < -9$

15. $\left| \frac{x+1}{x-1} \right| < 4$

16. $2x + 3|x| - 4 \geq 0$

17. $|2x - |1 + x|| \geq 2$

18. $|x - 3| > 0$

19. $\frac{3 + |2 - x|}{5} + \frac{1}{2|x|} > 1$

20. $\left| \frac{x + |x|}{x - 1} \right| < 1$