

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

TRIGONOMETRIA: DISEQUAZIONI TRIGONOMETRICHE

Esercizio 1: Risolvere la seguente disequazione

$$\sin x > \frac{1}{2}.$$

Svolgimento: Trovare le soluzioni della disequazione data significa determinare l'ascissa dei punti della circonferenza goniometrica le cui ordinate sono maggiori di $\frac{1}{2}$.

Gli angoli x tali che $\sin x = \frac{1}{2}$ sono

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

essendo la funzione seno periodica di periodo 2π .

Allora la disequazione data è verificata se

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 2: Risolvere la seguente disequazione

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 < 0.$$

Svolgimento: Ponendo $y = \sin x$ la disequazione data diventa

$$2y^2 + 3y + 1 < 0,$$

la cui soluzione è data da

$$-1 < y < -\frac{1}{2}.$$

Allora la disequazione data equivale a

$$-1 < \sin x < -\frac{1}{2}.$$

Gli angoli x tali che $\sin x = -1$ sono

$$x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mentre quelli per cui $\sin x = -\frac{1}{2}$ sono

$$x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \quad \text{e} \quad x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

essendo la funzione seno periodica di periodo 2π . Allora la disequazione data è verificata se

$$\frac{7}{6}\pi + 2k\pi < x < \frac{11}{6}\pi + 2k\pi, \quad x \neq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 3: Risolvere la seguente disequazione

$$\sin x + \cos x < 1.$$

Svolgimento: Tale disequazione è lineare in seno e coseno e si può risolvere utilizzando le formule parametriche

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

dove $t = \tan \frac{x}{2}$. Per poter usare queste formule bisogna imporre che

$$x \neq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ponendo $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ nella disequazione e tenendo conto del fatto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π si ha

$$\sin \pi + \cos \pi = 0 + (-1) = -1 < 1,$$

quindi $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni della disequazione data. Sostituendo nell'equazione le formule parametriche si ottiene

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} < 1.$$

Facendo il minimo comune multiplo si ha

$$\frac{2t + 1 - t^2 - 1 - t^2}{1+t^2} < 0,$$

da cui segue

$$\frac{2t - 2t^2}{1+t^2} < 0.$$

Essendo $1+t^2 > 0$, tale disequazione equivale a

$$2t - 2t^2 < 0,$$

e quindi a

$$2t(t-1) > 0,$$

le cui soluzioni sono date da

$$t < 0 \quad \vee \quad t > 1.$$

Allora si ha

$$\tan \frac{x}{2} < 0 \quad \vee \quad \tan \frac{x}{2} > 1.$$

La disequazione $\tan \frac{x}{2} < 0$ ha come soluzione

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < \frac{x}{2} < \pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

da cui segue

$$\pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Infine la disequazione $\tan \frac{x}{2} > 1$, è verificata se

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi se

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tenendo conto del fatto che $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni, allora la disequazione data è verificata se

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 4: Risolvere la seguente disequazione

$$\sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \sin x \cos x - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos^2 x > 0.$$

Svolgimento: Tale disequazione è omogenea di secondo grado e per risolverla conviene dividere entrambi i membri per $\cos^2 x$: tale passaggio è lecito solo se $\cos x \neq 0$. Se $\cos x = 0$ allora

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sostituendo tali valori nella disequazione si ha

$$\begin{aligned} & \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) \\ &= 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 0 \\ &= 1 > 0, \end{aligned}$$

quindi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni della disequazione data.

Dividendo entrambi i membri della disequazione per $\cos^2 x > 0$ si ottiene

$$\tan^2 x + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \tan x - \frac{\sqrt{3}}{3} > 0.$$

Ponendo $y = \tan x$ tale disequazione diventa

$$y^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right)y - \frac{\sqrt{3}}{3} > 0,$$

le cui soluzioni sono

$$y < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad y > 1.$$

Allora si ha

$$\tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad \tan x > 1.$$

La disequazione $\tan x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ è verificata se

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

mentre l'equazione $\tan x > 1$ ha come soluzioni

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi, tenendo conto del fatto che $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni, la disequazione data risulta verificata se

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{5}{6}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 5: Risolvere la seguente disequazione

$$\frac{2 \cos x - 1}{\cos x} \leq 1.$$

Svolgimento: Facendo il minimo comune multiplo la disequazione data diventa

$$\frac{2 \cos x - 1 - \cos x}{\cos x} \leq 0$$

che equivale a

$$\frac{\cos x - 1}{\cos x} \leq 0.$$

Poiché

$$\cos x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

essendo

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad x \in \mathbb{R},$$

la disequazione data equivale a

$$\cos x > 0,$$

che ha come soluzione

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\sin x > \frac{1}{2}$

2. $\tan x (\tan x - 1) < 0$

3. $\frac{\sin x}{\cos x + 1} \geq 0$

4. $\left| \frac{1}{\cos x} \right| < 2$

5. $2 \sin^2 x - \sin x - 1 < 0$

6. $\frac{1 + |2 \sin x|}{1 + 2 \sin x} > 0$

7. $2 \cos x - 1 < 0$

8. $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

9. $2 \cos^2 x + |\cos x| < \sin^2 x - \cos x$

10. $|\tan x| < \sqrt{3}$

11. $2 \cos \frac{x}{2} + \sin x \geq 0$

12. $\sin x (2 \cos x - 1) > 0$

13. $\cos^2 x - |\sin x| > 1 + \sin x$

14. $\frac{3}{2 \cos x} \geq 2 \cos x$

15. $\sqrt{3 \tan^2 x - 1} < \sqrt{3} \tan x$

16. $\cos x - \sin x > 0$

17. $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\sin 4x} > 0$

18. $\frac{2|\sin x| - 1}{2 \sin x - 1} > 0$

19. $3 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x < 3 \sin x - \sqrt{3} \cos x$

20. $\cos 2x - \cos x > 0$

21. $2 \sin^2 x - 1 < 0$

22. $\sqrt{2 \sin x} < \sin x + 1$

23. $\frac{4 \cos^2 x - 3}{2 \sin x - 1} > 0$

24. $\frac{1 - 2 |\cos x|}{1 + \cos x} > 0$

25. $\cos^2 x \leq \cos x$

26. $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

27. $2 \cos x - \sqrt{2} < 0$

28. $\frac{\sqrt{3} \tan x - 1}{2 \sin x - \sqrt{3}} < 0$

29. $\left| \frac{1}{\sin x} \right| > 3$

30. $\sin 2x + \cos 2x < 1$

31. $\sin^2 x < \frac{1}{2}$

32. $\frac{2 |\sin x| + \sqrt{3}}{\cos x} > 0$

33. $\sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x < 0$

34. $\frac{\sin^2 x - 2}{\cos x} < 0$

35. $\cos x - 2\sqrt{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} > 0$

36. $(2 \sin x - 1) \sin x > 0$

37. $|2 \cos x| > \sqrt{3}$

$$38. \frac{\sqrt{2} \sin^2 x}{\cos x} > \tan^2 x$$

$$39. \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin x > 0$$

$$40. |\sin x - \cos x| < 1$$

$$41. 0 < \cot x \leq \frac{1}{2}$$

$$42. \sin 2x - \cos x + 1 > 2 \sin x$$

$$43. \frac{1 - 2 |\cos x|}{2 \cos x + 1} > 0$$

$$44. \left| \sqrt{3} \tan^2 x - 2 \tan x \right| < \sqrt{3}$$

$$45. \frac{\cos 5x + \cos 3x}{\cos 4x} \leq 0$$

$$46. \tan^2 \frac{x}{2} + \cos x < 1$$

$$47. 2 \cos x > \sqrt{3}$$

$$48. \sqrt{2 \sin^2 x - 1} - \cos x < \sin x$$

$$49. \frac{\sqrt{3}}{3} |\tan x| < 1$$

$$50. 2 \cos^2 x - \cos x < 0$$

$$51. \frac{\sin x + \sqrt{3}}{\sin x} \geq 3$$

$$52. \cos 2x < \sin x$$

$$53. \tan^2 x - 3 > 0$$

$$54. \left| \frac{\sin x}{\cos x + 1} \right| \geq 1$$

$$55. 2\sqrt{2 + \cos x} > 1 + 2 \cos x$$

$$56. \frac{4 \cos^2 x - 1}{\cos x} < 0$$

$$57. 2 \sin x < \sqrt{3}$$

58. $\frac{1}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

59. $2 \left| \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) \right| - 1 < 0$

60. $2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 > 0$

61. $\frac{2 \sin x - 1}{\sin x} < 1$

62. $2 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - \cos x + 1 > 0$

63. $\frac{2 \sin x + \sqrt{3}}{|\cos x|} \leq 0$

64. $\sqrt{2 \cos^2 x - 1} > \sin x - \cos x$

65. $\tan x \leq \sqrt{3}$

66. $\frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{\sin x} < 0$

67. $\sin^2 x - 3 \cos^2 x > 0$

68. $\sqrt{2 |\cos x|} - 1 < 0$

69. $\cos x < \cos \frac{x}{2}$

70. $|\sin x| - 1 > 0$

71. $\frac{3 \tan x + \sqrt{3}}{\cot x + \sqrt{3}} (2 \sin x - 1) < 0$

72. $\sin 2x - \cos x < 0$

73. $\frac{2 \cos x - 3}{\sin x} \geq 0$

74. $2 \cos^2 x \leq 1$

75. $\frac{1 - 3 \cot^2 x}{2 \cos x - 1} < 0$

76. $\left| \frac{\sin x - 1}{\cos x} \right| < 1$

77. $\sin^2 \frac{x}{2} + \cos x + 1 > 0$

$$78. \sqrt{4\sin^2 x - 3} > 1 + 2\sin x$$

$$79. \sin 2x < \cos x$$

$$80. 1 - \frac{1}{\tan x} < 0$$

$$81. |\sin x| > \frac{1}{2}$$

$$82. \frac{\tan^2 x - 3}{\sin x} < 0$$

$$83. (\sqrt{3} - 2\sin x)(2\sin x - 1) < 0$$

$$84. 3\tan^2 x > 1$$

$$85. (1 + 2\sin x)\cos x > 0$$

$$86. \left| 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x \right| > 3$$

$$87. \frac{\cos 7x - \cos 3x}{\sin x \cos x} > 0$$

$$88. 2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x \leq 1$$

$$89. |\cos x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$90. \frac{4\sin^2 x - 1}{2\cos x} \geq 0$$

$$91. \cos 2x > \cos x - 1$$

$$92. 0 < \sin x < 1$$

$$93. \left| \frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x - 1} \right| \leq 1$$

$$94. \cos^2 x \geq \frac{3}{4}$$

$$95. \sqrt{2}\cos x \sin x - \sin x > 0$$

$$96. \sin x + \cos x < 1$$

$$97. \sqrt{2 \cos^2 x - 1} > \sqrt{2} \cos x$$

$$98. 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sin 2x < \sqrt{3}$$

$$99. (2 \cos x - 1) (2 \sin x - \sqrt{3}) > 0$$

$$100. \frac{|2 \sin x + 1|}{1 - \sin x} \geq 0.$$

Esercizio 6: Risolvere la seguente equazione

$$|\sin x| - |\cos x| = 0.$$

Svolgimento: Innanzitutto studiamo il segno degli argomenti dei due moduli:

$$\sin x \begin{cases} \geq 0 & \text{se } 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ < 0 & \text{se } \pi + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e

$$\cos x \begin{cases} \geq 0 & \text{se } 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ < 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Si presentano quattro diversi casi.

- Caso 1: $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

L'equazione data è equivalente a

$$\sin x - \cos x = 0.$$

Poiché $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, l'equazione si può riscrivere come

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

le cui soluzioni sono

$$x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$ sono date da

$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Caso 2: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'equazione data è equivalente a

$$\sin x - (-\cos x) = 0,$$

e quindi a

$$\sin x + \cos x = 0.$$

Poiché $\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, l'equazione si può riscrivere come

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x,$$

che risulta verificata se

$$x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \quad \vee \quad x = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e quindi se

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono date da

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Caso 3: $\pi + 2k\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'equazione data si può riscrivere come

$$-\sin x - (-\cos x) = 0.$$

che equivale a

$$\sin x - \cos x = 0.$$

Tale equazione è stata già risolta nel Caso 1. Le soluzioni trovate sono

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $\pi + 2k\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono date da

$$x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Caso 4: $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'equazione data si può riscrivere come

$$-\sin x - \cos x = 0,$$

e quindi come

$$\sin x + \cos x = 0,$$

che è l'equazione studiata nel Caso 2. Le soluzioni trovate sono

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

e di queste soluzioni le uniche che verificano la condizione $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi < x \leq 2\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono date da

$$x = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In conclusione l'equazione data ha come soluzioni

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

1. $|1 - 2 \sin x| = \sin x + 1$
2. $\cos x = \frac{4 \sin x + 1}{|\cos x|}$
3. $|2\sqrt{3} \sin x - 3| = 2(\sqrt{3} \sin x - \cos x) + 1$
4. $|1 + 2 \cos x| = \cos x + 1$
5. $\frac{2 + \sqrt{3}}{\cos x} = 2(\sqrt{3} + 1) \tan x + \frac{1}{|\cos x|}$
6. $|\sin x - 2 \cos x| = |\sin x - 2|$
7. $\sin^2 x - |\cos x| = 1 + \cos x$
8. $|\sin x| + |\cos x| = 0$
9. $\cos x \cdot |\tan x + 1| - 2 \sin x = 0$
10. $|\cos^2 x - \sin^2 x| = \sin x - \cos x.$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

$$1. \begin{cases} \cos x \geq 1 \\ 1 - 2 \cos x > 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{\sin x + 1}{\cos x} \geq 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \tan x \geq 0 \\ \tan x - 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \sqrt{3} |\cos x| - \sin x < 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \cos x - \sin x > 1 \\ \cos x < 2. \end{cases}$$

Esercizi: Determinare il dominio delle seguenti funzioni

$$1. y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

$$2. y = \sqrt[3]{\frac{\sin x + \cos x}{|\sin x| - 2}}$$

$$3. y = \frac{1}{\sqrt{3} |\cos x| - \sin x}$$

$$4. y = \sqrt{1 - 2 \sin x}$$

$$5. y = \frac{1}{2 \sin^2 x - 1}$$

$$6. y = \frac{2}{\cos x} + \sqrt{\sin x}$$

$$7. y = \sqrt{2 |\sin x| - \sqrt{3}}$$

$$8. y = \frac{1}{2 \cos^2 x - \cos x}$$

$$9. y = \sqrt{\frac{\cos x + 2}{\sin^2 x}}$$

$$10. y = \frac{\sqrt{\tan^2 x + 2}}{\tan x - 1}$$

$$11. y = \frac{x}{|\sin x| - |\cos x|}$$

$$12. y = \frac{1 - 2x}{\cos^4 x - \cos^2 x}$$

$$13. y = \sqrt{\frac{\sin x}{\cos x + 1}}$$

$$14. y = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$$

$$15. y = \sqrt[3]{\frac{2}{1 - \sin^2 x}}$$

$$16. y = \frac{1 - x}{\tan^2 x + \tan x}$$

$$17. y = \sqrt{\frac{|\sin x + \cos x| + 1}{\cos x - \cos^2 x}}$$

$$18. y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos x}} + \sqrt{\cos x}$$

$$19. y = \frac{1}{\sin x - \cos x + 1}$$

$$20. y = \sqrt{\frac{|\sin x| + 1}{\cos x}}.$$