CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

Esercizio 1: Risolvere la seguente disequazione

$$\log x + \log(x-8) \geq 2\,.$$

Svolgimento: Affinché la disequazione abbia significato bisogna imporre che gli argomenti dei logaritmi presenti nella disequazione siano positivi e quindi che

$$\begin{cases} x > 0 \\ \\ x - 8 > 0\,. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} x > 0 \\ \\ x > 8\,, \end{cases}$$

la cui soluzione è $x > 8$.
Usando le proprietà dei logaritmi la disequazione data si può riscrivere come

$$\log \Big[x(x-8)\Big] \geq 2\,,$$

che equivale a

$$x(x-8) \geq e^2\,,$$

essendo $e > 1$. Moltiplicando e sommando i monomi simili si ottiene

$$x^2 - 8x - e^2 \geq 0$$

la cui soluzione è data da

$$x < 4 - \sqrt{16+e^2} \quad \vee \quad x > 4 + \sqrt{16+e^2}\,.$$

Tenendo conto della condizione di esistenza $x > 8$, la disequazione data risulta verificata se

$$x > 4 + \sqrt{16+e^2}\,.$$

Esercizio 2: Risolvere la seguente disequazione

$$\log\Big(\log(x+1)\Big) < 0\,.$$

Svolgimento: Affinché la disequazione abbia significato bisogna imporre che gli argomenti dei logaritmi presenti nella disequazione siano positivi e quindi che

$$\begin{cases} \log(x+1) > 0 \\ x+1 > 0\,. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\begin{cases} x+1 > 1 \\ x > -1\,, \end{cases}$$

da cui si ha

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > -1\,, \end{cases}$$

la cui soluzione è $x > 0$.
Poiché $0 = \log 1$ e la base del logaritmo esterno è **maggiore di 1**, la disequazione data si può riscrivere come

$$\log(x+1) < 1\,,$$

che equivale a

$$x+1 < e\,,$$

essendo la base del logaritmo $e > 1$. Si ottiene

$$x < e-1\,.$$

Considerando la condizione di esistenza $x > 0$, la disequazione data risulta verificata se

$$0 < x < e-1\,.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\log_2(3-x) < 1$
2. $\sqrt{1-\log_2 x} > 1$
3. $\log_{\frac{3}{2}}(4-3x) < 0$
4. $\log\left|\dfrac{x^2+3}{x-1}\right| > \log|x-2|$
5. $\log\Big(\log(x^2-6)\Big) < 0$
6. $|\log_a x - 2| - \log_a^2 x > 0\,, \quad a > 0,\ a \neq 1$
7. $\sqrt{\log x} < 1$
8. $\log x + \log(x+3) < 1$
9. $\log\dfrac{3|x|+1}{2+|x|} < 1$

10. $\log\left(\sqrt{|4x-1|-x-2}+1\right) \geq 0$

11. $\log_2\left(4^{2x}-3\cdot 4^x+6\right) \leq \log_2\left(4^x-2\right)+\log_2\left(4^x+1\right)$

12. $\log\left(3-\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|\right) < \log 2$

13. $\log\dfrac{\sqrt{x}-1}{2-x} \geq 0$

14. $\log_3\left(\log_{\frac{1}{3}}(1+3x)\right) > 0$

15. $\sqrt{\log_a(x^2-1)} > \sqrt{\log_a(x^2+1)}\,, \quad a>0,\ a\neq 1$

16. $\log x^2-\log(x-1) > 2\log 2$

17. $\log\dfrac{3+|x+3|}{|x-1|-2} > 0$

18. $\log\left(\log(x^2-15)\right) \geq 0$

19. $\log_a\sqrt{x} \geq 0\,, \quad a>0,\ a\neq 1$

20. $\sqrt{(\log_2 x-3)\,(\log_2 x-1)} \geq \log_2 x+2$

21. $\log\dfrac{|x-1|+x}{1-|x|} < \log\dfrac{1}{3}$

22. $\sqrt{\sqrt{\log x^3-1}-\sqrt{5-\log x}} \geq 0$

23. $\Big|\,|\log(x+2)-3|-2\Big| < 1$

24. $\sqrt{\log_a x^2} \geq 0\,, \quad a>0,\ a\neq 1$

25. $81\log^4 x+\log^2 x-2 \geq 0$

26. $\sqrt{|\log x-e|-1}+\sqrt{2-|\log x+1|} \geq 0$

27. $\log_{\frac{1}{2}}\left(7-2^x\right)-\log_{\frac{1}{2}}\left(5+4^x\right) \geq -\log_{\frac{1}{2}} 7$

28. $\log \dfrac{|x| - |x-1|}{x-2} < 0$

29. $\log_2 \left| \log_2 \dfrac{1}{x} \right| < 2$

30. $\log \left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 2 \right) \leq 0$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} \log_2 (4-3x) \geq 0 \\ \\ \log_{\frac{1}{2}} \log_2 (1-x) \geq 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log x - \dfrac{2}{\log x} + 1 \geq 0 \\ \\ \dfrac{|\log x + 1| - 2}{\log x} < 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log \left(\sqrt{x-1} - 2 \right) < 0 \\ \\ \log \left| \dfrac{x-8}{x} \right| \geq 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{\log^2 x - 4 \log x + 3}{\log x + 2} \leq 0 \\ \\ \log |x| > 1 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \left| \dfrac{1 + 3\log x}{2 + \log x} \right| > 1 \\ \\ \left| \dfrac{1 + \log |x|}{1 - \log |x|} \right| < 2 \end{cases}$

Esercizi: Risolvere i seguenti esercizi

1. date le funzioni

$$f(x) = \log x - \log(x-1)$$

e

$$g(x) = \log \frac{x}{x-1}\,,$$

stabilire, motivando la risposta, se hanno lo stesso dominio;

2. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$x^2 - \Big[\log(2k+1) - 1\Big]x + 1 = 0$$
non ammette radici reali;

3. dati gli insiemi
$$A = \Big\{x \in \mathbb{R} \,:\, \log_{\frac{1}{2}} \log_2(2x) \geq 0\Big\}$$
e
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2\right) \geq 0\right\}\,,$$
determinare l'insieme $A \cap B$;

4. data la funzione
$$f(x) = \sqrt{1 - \log_2 |4 - x^2|}$$
determinare il suo dominio;

5. date le proposizioni
$$p(x):\ \log(x-5) + 6 < 0$$
e
$$q(x):\ \log\Big(3|x|\Big) \geq 4\,,$$
stabilire per quali valori di x risulta falsa la proposizione $p(x) \wedge q(x)$ e vera la proposizione $\overline{p(x) \wedge \overline{q(x)}}$;

6. date le funzioni
$$f(x) = \sqrt{|\log x + 2|}$$
e
$$g(x) = 3 - |\log x + 1|\,,$$
determinare gli insiemi $D_f \cup D_g$ e $D_f \cap D_g$, sapendo che D_f e D_g rappresentano il dominio di f e g rispettivamente;

7. date le proposizioni
$$p(x):\ \log(x+3) + 1 > 0$$
e
$$q(x):\ |x-2| + 2x - |x| \geq 0\,,$$
stabilire per quali valori di x risulta vera la proposizione $p(x) \wedge q(x)$ e false le proposizioni $p(x) \vee q(x)$ e $\overline{p(x)} \vee \overline{q(x)}$;

8. stabilire per quali valori di $k > 0$ l'equazione
$$\log^2 x + \log x + \log k = 0$$
ammette radici reali distinte;

9. date le funzioni
$$f(x) = \frac{1}{2}\log|x^2 - 1| - \log|3x|$$
e
$$g(x) = \log\frac{\sqrt{|x^2-1|}}{3|x|},$$
stabilire, motivando la risposta, se hanno lo stesso dominio;

10. data la funzione
$$f(x) = \log\left(\sqrt{\log x + 1} - \sqrt{|\log x| - 2}\right)$$
determinare il suo dominio.