

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Esercizio 1: Risolvere la seguente disequazione

$$\sqrt[3]{x^3 - 1} < \sqrt{x^2 + 1}.$$

Svolgimento: Il campo di esistenza della disequazione è \mathbb{R} , essendo $x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Il primo membro dell'equazione può essere positivo, negativo o nullo per ogni $x \in \mathbb{R}$, mentre il secondo è positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora la disequazione data è equivalente a

$$x^3 - 1 \leq 0 \cup \begin{cases} x^3 - 1 > 0 \\ (x^3 - 1)^2 < (x^2 + 1)^3. \end{cases}$$

Risolvendo si ha

$$x \leq 1 \cup \begin{cases} x^3 - 1 > 0 \\ 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 > 0, \end{cases}$$

che si può riscrivere come

$$x \leq 1 \cup \begin{cases} x > 1 \\ x^2(3x^2 + 2x + 3) > 0. \end{cases}$$

Risolviamo la disequazione di quarto grado studiando i segni dei suoi due fattori:

$$x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$3x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Allora si ottiene

$$x \leq 1 \cup \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 0, \end{cases}$$

da cui segue che la disequazione data è verificata se $x \neq 0$.

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali

1. $x - 1 - \sqrt{x + 1} > 0$

2. $\sqrt{3 - 2x} \leq x + 2$

3. $\frac{\sqrt{x}}{x+1} > 0$

4. $\sqrt[3]{x^3 - 2x} \geq 1$

5. $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{3 + \sqrt{x}} \geq 0$

6. $\frac{x - 4 + \sqrt{x+2}}{1 - x^2} \geq 0$

7. $\frac{\sqrt[3]{x+1} + 2}{\sqrt{x+3} - 3x} \leq 0$

8. $\frac{1}{\sqrt{x-2}} - 3 \geq 0$

9. $\sqrt{x^2 + |x-2|} > x + |x|$

10. $\sqrt[3]{x\sqrt{x-1} + 3(x-1)^2 - \sqrt{x-1}} > 0$

11. $\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+2}} - \sqrt[3]{x} \geq 0$

12. $\frac{5 + \sqrt{9-5x}}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{3x-x^2}} > 0$

13. $\sqrt[3]{x^3 + 3\sqrt{3}} < \sqrt{x^2 + 3}$

14. $\sqrt{x-1} \leq \sqrt[3]{x\sqrt{x} + 1}$

15. $\frac{|x| + |x-3| + \sqrt{x-2}}{\sqrt{2x-3}\sqrt{7-x}}$

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni irrazionali al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$

1. $\sqrt{x^2 - 3ax + 2a^2} > x + a$

2. $\frac{\sqrt{a(4x-3a)} - x^2}{x+2a} \leq 1$

3. $\sqrt{a+x} - \sqrt{x} > \sqrt{a-x}$

4. $\sqrt{3x+10a^2} > 9a - \sqrt{3x+a^2}$

5. $3 + \sqrt{x^2 + 4(a-1)^2} \geq x + 3a$

6. $\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{2 + x^2}} < a$

7. $1 - 4a < -4\sqrt{a+14}$

8. $\sqrt{\frac{2ax - 3x - 2a + 3}{a^2 - 4}} > 0$

9. $2\sqrt{x-a} > \frac{a}{\sqrt{x+a}}$
 10. $\sqrt{\frac{(2a-4)(x-2)}{x^2-2x-3}} > 0$

Esercizi: Risolvere i seguenti esercizi

1. dati gli insiemi

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1+x+\sqrt{x^2-1}}{1-x} < 1 \right\}$$

e

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2+8x+15} + 4 - x > 0 \right\},$$

determinare l'insieme $A \cap B$ e verificare che $A \setminus B = C_A(A \cap B)$, dove $C_A(A \cap B)$ indica il complementare di $A \cap B$ rispetto ad A ;

2. date le proposizioni

$$p(x) : x - 5 < \sqrt{x^2 - x}$$

e

$$q(x) : 1 + \sqrt{x+1} > x,$$

stabilire per quali valori di x risulta falsa la proposizione $p(x) \wedge q(x)$ e vera la proposizione $\overline{p(x) \wedge q(x)}$;

3. dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x + \sqrt{5x+10} > 8\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 5x - 6 > 0\},$$

determinare l'insieme $A \cup B$;

4. dati gli insiemi

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > \sqrt{|1-x^2|} - 1 \right\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{R} : 1 + 3|x| > \sqrt{1-x}\},$$

determinare gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e verificare che $B \setminus A = C_B(A \cap B)$;

5. date le proposizioni

$$p(x) : 3 < \sqrt[3]{2+x^2}$$

e

$$q(x) : \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}} > -1,$$

stabilire per quali valori di x risultano false le proposizioni $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$ e $\overline{p(x) \wedge q(x)}$;

6. dati gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 5x - 1 < 0\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x+1} > 1\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 < 0\}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 + 2x} < 0 \right\},$$

determinare il complementare di $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ rispetto ad \mathbb{R} ;

7. date le proposizioni

$$p(x) : \frac{x - \sqrt{|x^2 - 1|}}{x + 3} < 0$$

e

$$q(x) : x - \sqrt{x^2 - 2x} + 3 > x,$$

stabilire per quali valori di x risulta vera la proposizione $p(x) \wedge q(x)$;

8. date le proposizioni

$$p(x) : \sqrt{|x + 2|} < 3x - 4$$

e

$$q(x) : 1 + 3x > \sqrt{3x},$$

stabilire per quali valori di x risultano vere le proposizioni $\overline{p(x) \wedge q(x)} \vee q(x)$ e $\overline{p(x)} \wedge \overline{p(x) \vee q(x)}$;

9. dati gli insiemi

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{(x^2 - 3)^2} < -2 \right\}$$

e

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sqrt{5 + 4x} < |3 + 2x| \right\},$$

determinare gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$ e $C_{\mathbb{R}}(A) \setminus B$;

10. date le proposizioni

$$p(x) : \sqrt[3]{\sqrt{x - 2} + 1} \geq 0$$

e

$$q(x) : \sqrt{x^2 + x + 1} > -1,$$

stabilire per quali valori di x risultano false le proposizioni $p(x) \wedge q(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $\overline{p(x) \wedge q(x)}$, $\overline{p(x)} \wedge q(x)$ e $p(x) \vee \overline{q(x)}$.