

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SU

DISEQUAZIONI DI GRADO SUPERIORE AL PRIMO

Esercizio 1: Risolvere la seguente disequazione

$$2x^2 - 5x - 3 > 0.$$

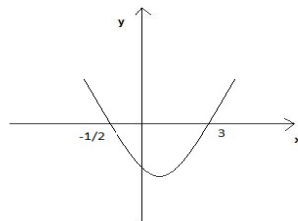
Svolgimento: Risolvere la disequazione data significa determinare i valori di x per cui la funzione $y = 2x^2 - 5x - 3$ assume valori positivi. A tal fine, innanzitutto risolviamo l'equazione ad essa associata, i.e.

$$2x^2 - 5x - 3 = 0.$$

Le soluzioni di tale equazione sono date da

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} \begin{cases} 3 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Allora la funzione $y = 2x^2 - 5x - 3$ rappresenta una parabola rivolta verso l'alto (essendo il coefficiente di x^2 positivo) e che interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 3$, come descritto nella seguente figura:



Pertanto la disequazione data è verificata se

$$x < -\frac{1}{2} \vee x > 3.$$

Esercizio 2: Risolvere la seguente disequazione

$$2x^2 - 3x - 2 \leq 0.$$

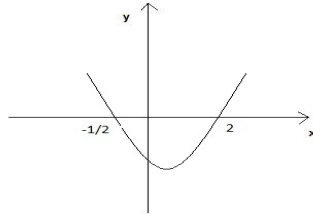
Svolgimento: Risolvere la disequazione data significa determinare i valori di x per cui la funzione $y = 2x^2 - 3x - 2$ assume valori non positivi. A tal fine, innanzitutto risolviamo l'equazione ad essa associata, i.e.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0.$$

Le soluzioni di tale equazione sono date da

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \begin{cases} / 2 \\ \backslash -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Allora la funzione $y = 2x^2 - 3x - 2$ rappresenta una parabola rivolta verso l'alto (essendo il coefficiente di x^2 positivo) e che interseca l'asse delle ascisse nei punti $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 2$, come descritto nella seguente figura:



Pertanto la disequazione data è verificata se

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 2 .$$

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $2x^2 + 3x - 2 > 0$
2. $x^2 + 2 > 0$
3. $-x^2 - 5x - 6 > 0$
4. $8x^2 < 0$
5. $x^2 - 5x + 10 \leq 0$
6. $-x^2 + 4x - 3 < 0$
7. $25 - 9x^2 \geq 0$
8. $x^2 - x > 0$
9. $4x - x^2 < 0$
10. $-4x^2 + 12x - 9 > 0$
11. $x^2 + 2x + 1 > 0$
12. $x^2 - x - 2 > 0$
13. $x^2 - 7x \geq 0$
14. $x^2 - 49 \leq 0$

15. $x^2 + 6x + 5 < 0$
16. $25(4x - 1) + (x - 5)^2 \geq 0$
17. $(2x - 1)(x - 3) - (x - 1)[2(2x - 1) + x] < 0$
18. $\frac{2x - (3 + x)^2}{2} - 1 > \frac{3 - x^2}{4}$
19. $(x + 5)^2 - (x - 1)(2x + 1) > 13(x + 2)$
20. $\frac{1 - 3x}{5} - \frac{(2 - x)(2 + x)}{3} < x - \frac{6}{5} + \frac{1 + x^2}{15}$

Esercizio 3: Risolvere la seguente disequazione frazionaria

$$\frac{x^2 - 3x}{x - 2} > 0.$$

Svolgimento: Per risolvere la disequazione data occorre studiare i segni del numeratore e del denominatore, ponendo ciascuno di questi termini maggiore di zero:

Numeratore: $x^2 - 3x > 0$ che è verificata se $x < 0 \vee x > 3$

Denominatore: $x - 2 > 0$ che è verificata se $x > 2$.

I segni del numeratore e del denominatore si possono rappresentare così:

	0	2	3	
NUM.	+	-	-	+
DEN.	-	-	+	+
	-	+	-	+

e quindi la disequazione data è verificata se

$$0 < x < 2 \vee x > 3.$$

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\frac{x^2}{x^2 - 1} > 0$
2. $\frac{8x - x^2 - 7}{9x^2 - 8x - 1} > 0$
3. $\frac{x}{x^2 + 1} < 0$
4. $\frac{2x^2 - 1}{x - 2} \geq 0$
5. $\frac{5x^2 - 4x}{x^2 - 6x + 9} > 0$

6. $\frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 2x} \geq 0$
7. $\frac{2}{x^2 + 1} > 1$
8. $\frac{x - 2}{2} > \frac{3}{x - 1}$
9. $\frac{1}{x + 1} \left(\frac{6}{x - 1} + 3 \right) < 1 + \frac{2}{x - 1}$
10. $\frac{x - 5}{x + 3} \leq \frac{8 - x}{3 - x}$

Esercizio 4: Risolvere il seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0. \end{cases}$$

Svolgimento: Per risolvere il sistema occorre studiare le due disequazioni che lo compongono. Risulta che

$$x^2 - 4 > 0 \iff x < -2 \vee x > 2$$

e

$$x^2 - 4x + 3 \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 3.$$

Le soluzioni del sistema dato si ottengono intersecando gli insiemi delle soluzioni delle due disequazioni che lo compongono, i.e.

$$\begin{cases} x < -2 \vee x > 2 \\ 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Pertanto il sistema dato è verificato se $2 < x \leq 3$.

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni

1. $\begin{cases} 3x^2 - x - 2 > 0 \\ 6x^2 - x - 7 > 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 < 0 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x^2 - x + 5 < 0 \\ \frac{x + 2}{3} - x > \frac{x - 1}{4} \end{cases}$
4. $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geq 0 \\ 2(2x - 9) < x \\ x^2 + 2x - 15 \leq 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0 \\ 3x - x^2 \geq 0 \end{cases}$