CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI SULLE

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

Esercizio 1: Risolvere la seguente disequazione

$$2^x \leq \frac{3^{x+3}}{8}\,.$$

Svolgimento: Moltiplicando per $8 = 2^3$ il primo e il secondo membro, la disequazione data si può riscrivere come

$$2^{x+3} \leq 3^{x+3}\,.$$

Dividendo per $3^{x+3} > 0$ il primo e il secondo membro di tale disequazione si ottiene

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} \leq 1\,,$$

da cui segue

$$x + 3 \geq 0\,,$$

essendo $2/3 < 1$.
Allora la disequazione data è verificata se $x \geq -3$.

Esercizio 2: Risolvere la seguente disequazione

$$4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0\,.$$

Svolgimento: Poiché $4 = 2^2$, la disequazione data si può riscrivere come

$$2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 < 0\,.$$

Ponendo $y = 2^x$ tale disequazione diventa

$$y^2 - 10y + 16 < 0\,,$$

la cui soluzione è data da

$$2 < y < 8\,.$$

Allora la disequazione data diventa

$$2 < 2^x < 8$$

e quindi

$$\begin{cases} 2^x > 2 \\ 2^x < 8\,. \end{cases}$$

Tale sistema equivale a

$$\begin{cases} x > 1 \\ \\ x < 3\,, \end{cases}$$

e quindi la disequazione è verificata se $1 < x < 3$.

Esercizio 3: Risolvere la seguente disequazione

$$2^x + 5 \cdot 3^x > 2^{x+1}\,.$$

Svolgimento: La disequazione data si può riscrivere come

$$5 \cdot 3^x > 2 \cdot 2^x - 2^x\,,$$

da cui si ha

$$5 \cdot 3^x > 2^x(2-1)\,,$$

e quindi

$$5 \cdot 3^x > 2^x\,.$$

Passando al logaritmo naturale ad entrambi i membri si ottiene

$$\log\left(5 \cdot 3^x\right) > \log\left(2^x\right)\,,$$

essendo la base del logaritmo **maggiore di** 1.
Usando le proprietà dei logaritmi si ha

$$\log 5 + x \log 3 > x \log 2\,.$$

Quindi la disequazione data è diventata una disequazione algebrica: sommando i monomi simili si ha

$$(\log 3 - \log 2)\, x > -\log 5\,,$$

la cui soluzione è

$$x > -\frac{\log 5}{\log 3 - \log 2}\,,$$

essendo $\log 3 - \log 2 > 0$.

Esercizi: Risolvere le seguenti disequazioni

1. $\dfrac{3^{x+1}}{27^{2x}} < \dfrac{1}{3^{x^2+5}}$

2. $\dfrac{15 \cdot 2^x}{2^3 \cdot 9} < 5 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4-x}$

3. $\dfrac{5 \cdot 3^x}{2^{x-1}} \leq 10^x$

4. $4\sqrt{2} < \dfrac{1}{\sqrt{8^x}}$

5. $\dfrac{3^{x+1} - 3^{x-1}}{2 \cdot 3^x + 3^{2x} + 1} < \dfrac{1}{2}$

6. $\left|\dfrac{3^x-1}{|9^x+2\cdot 3^x+1|}\right|<3$

7. $\sqrt{2^x}\geq 8\cdot\sqrt[3]{4^{x-1}}$

8. $\dfrac{(2/3)^{x-1}-4/9}{5^x-5^{1-x}-4}>0$

9. $|4^x-1|+|4^x-2|+|4^x-3|>6$

10. $\dfrac{3^{2x+1}+40}{3^x}<34$

11. $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}<7$

12. $2\cdot 5^x+4\cdot 5^{3-x}<205$

13. $\dfrac{(2^x+2)\,(2^x-8)\left(4^x-\sqrt[3]{2}\right)}{16-2^x}\geq 0$

14. $6^x-3^{x+1}-2^{x+1}+\geq 0$

15. $2^{x+1}<\sqrt{4^x-5\cdot 2^x}$

16. $4\,(3^x-2)^2-3\,(3^x-2)+1<0$

17. $\dfrac{3^x-1}{16-3\cdot 2^{2x}+2}\leq 0$

18. $2^{\frac{2x+4}{x}}<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2}$

19. $\dfrac{3^{x-1}}{27^{1-x}}<\dfrac{9}{3^{x+2}}$

20. $8\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-6\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+1>0$

21. $4^x-6\cdot 10^x+9\cdot 25^x>0$

22. $1<\left(\dfrac{2}{5}\right)^x\leq\dfrac{25}{4}$

23. $2^{2x+1}+4^{x-1}+4^x<13$

24. $\dfrac{2^x}{4}>5^{x-2}$

25. $4^{2x+1} - 16^{x-1} < \dfrac{7 \cdot 9^x}{3} + 7 \cdot 3^{2x}$

26. $\sqrt{9^{x+1}} \geq 25 \cdot 5^{2x}$

27. $\dfrac{4 \cdot 7^{x-1}}{21 + \sqrt{7^x}} \geq 1$

28. $10^x + 2^x < 5 + 5^{x+1}$

29. $5^{2x} > 10^{x+1}$

30. $\dfrac{2^{|x+1|}}{5^{2|x|}} \geq \dfrac{5^{|x+1|}}{2^{2|x|}}$

31. $3 + (2 \cdot 7^x - 3)\left(7^{x-1} + 2\right) > 2 \cdot 7^x$

32. $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \geq 0$

33. $\dfrac{2^x - 5}{2^x + 5} < \dfrac{2^x + 5}{2^x - 5}$

34. $12\left(\dfrac{4}{9}\right)^x - 35\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > -18$

35. $\sqrt{1 + 2^x} > \dfrac{1}{\sqrt{2^x - 1}}$

Esercizi: Risolvere i seguenti sistemi

1. $\begin{cases} \dfrac{2^x - 4^{-1}}{4^{x+1} - 33 \cdot 2^x + 8} \geq 0 \\ 8 \cdot 3^x + 9 \geq 9^x \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9^x - 3^x - 6 \geq 0 \\ 5^{1-x} + 4 \geq 5^x \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^{|x^2+x|+1} + 2^{|x^2+1|} > 12 \\ 4^x - 2^x > 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 6^x + 3^x - 2^x - 1 \leq 0 \\ 27^x - 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 \leq 0 \end{cases}$

5. $$\begin{cases} \left| \dfrac{7^{2|x^2-2x|} - 2 \cdot 7^{|x^2-2x|}}{7^{|x^2-2x|}} \right| < 7^{|x^2-2x|} \\ \\ 3^{2|x|+1} + 3^{|x|} - 3^{|x|+3} - 9 \geq 0 \end{cases}$$

Esercizi: Risolvere i seguenti esercizi

1. date le proposizioni
$$p(x): \ \sqrt{129 \cdot 2^x - 4^{x+2} - 8} > 0$$
e
$$q(x): \ \sqrt{3 - 2^{1-x} - \left(\frac{1}{4}\right)^x} \geq 0\,,$$
stabilire per quali valori di x risulta vera la proposizione $\overline{p(x)} \wedge q(x)$ e falsa la proposizione $\overline{p(x) \vee \overline{q(x)}}$;

2. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$x^2 - \left(3^{2k+1} - 1\right) x - 3^{2k+1} + 1 = 0$$
ammette radici reali;

3. dati gli insiemi
$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \, : \, 2^{x-1} \geq 2\right\}$$
e
$$B = \left\{x \in \mathbb{R} \, : \, \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-3x} > \frac{16}{9}\right\},$$
determinare l'insieme $A \cup B$;

4. date le proposizioni
$$p(x): \ 7^{x-5} + 6 < 0$$
e
$$q(x): \ 2^{3|x|} \geq 4\,,$$
stabilire per quali valori di x risulta falsa la proposizione $p(x) \wedge q(x)$ e vera la proposizione $\overline{p(x) \wedge \overline{q(x)}}$;

5. date le funzioni
$$f(x) = \sqrt{2^{3+2x} + 23 \cdot 2^x - 3}$$
e
$$g(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5x} - \left(\frac{1}{9}\right)^{2x-3}} + \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^{x+3}}\,,$$
determinare l'insieme $(D_f \cup D_g) \setminus (D_f \cap D_g)$, sapendo che D_f e D_g rappresentano il dominio di f e g rispettivamente;

6. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$\left(1-2^{k+1}\right)x^2+2^{k+2}x-1-2^{k+1}=0$$
non ammette radici reali;

7. dati gli insiemi
$$A=\{x\in\mathbb{R}\,:\,9^x-3^x\geq 6\}$$
e
$$B=\left\{x\in\mathbb{R}\,:\,5^{1-x}+4\geq 5^x\right\}\,,$$
determinare gli insiemi $A\cap B$, $A\setminus B$ e $C_{\mathbb{R}}A$, dove $C_{\mathbb{R}}A$ è il complementare di A rispetto a $\mathbb{R}$;

8. date le proposizioni
$$p(x):\ \frac{5^x}{5^x-1}>0$$
e
$$q(x):\ \sqrt[4]{9^x+2\cdot 3^{x+1}-27}\geq 0\,,$$
stabilire per quali valori di x risultano vere le proposizioni $p(x)\wedge q(x)$ e $p(x)\vee q(x)$ e falsa la proposizione $\overline{p(x)}\vee\overline{q(x)}$;

9. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$x^2-3^kx+3^{k+1}+6=0$$
ammette due radici reali uguali;

10. dati gli insiemi
$$A=\{x\in\mathbb{R}\,:\,4>|2^x-4|\}$$
e
$$B=\{x\in\mathbb{R}\,:\,4^x+9^x-2\cdot 6^x>0\}\,,$$
determinare l'insieme $A\cap B$.