CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

GEOMETRIA ANALITICA: LE CONICHE

Esercizio 1: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, scrivere l'equazione della retta tangente alla parabola $y = x^2 - 4$ e parallela alla bisettrice del I e III quadrante.

Svolgimento: L'equazione della bisettrice del I e III quadrante è

$$y = x\,,$$

quindi il coefficiente angolare della retta cercata sarà 1 e la sua equazione sarà del tipo

$$y = x + k\,, \quad k \in \mathbb{R}\,.$$

Ora bisogna trovare il valore di k affiché tale retta sia tangente alla parabola. Per fare ciò data basta imporre che il sistema

$$\begin{cases} y = x + k \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

abbia un'unica soluzione (due soluzioni coincidenti).
Usando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} y = x + k \\ x + k = x^2 - 4\,, \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} y = x + k \\ x^2 - x - k - 4 = 0\,. \end{cases}$$

L'equazione di secondo grado presente nel sistema ha discriminante

$$\Delta = 1 - 4(-k - 4) = 4k + 17\,.$$

Il sistema ammette un'unica soluzione se $\Delta = 0$ e quindi se

$$k = -\frac{17}{4}\,.$$

Allora l'equazione della retta cercata è

$$y = x - \frac{17}{4}\,.$$

Esercizio 2: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, determinare i punti di intersezione dell'ellisse di equazione $3x^2 + y^2 = 12$ con la circonferenza avente centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio $\sqrt{10}$.

Svolgimento: L'equazione della circonferenza avente centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio $\sqrt{10}$ è data da
$$x^2 + y^2 = 10\,.$$
Per trovare le intersezioni tra tale circonferenza e l'ellisse data basta risolvere il sistema
$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12 \\ x^2 + y^2 = 10\,. \end{cases}$$
Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima e usando il metodo di riduzione, si ottiene
$$\begin{cases} 2x^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 10\,, \end{cases}$$
da cui
$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ 1 + y^2 = 10\,. \end{cases}$$
Allora si ha
$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9\,, \end{cases}$$
che si può riscrivere come
$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 9\,, \end{cases}$$
le cui soluzioni sono
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -3\,. \end{cases}$$

Allora l'ellisse e la circonferenza si intersecano nei punti $(1, 3)$,$(1, -3)$, $(-1, 3)$ e $(-1, -3)$.

Esercizio 3: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, determinare le coordinate del centro, gli assi e gli asintoti dell'iperbole di equazione $2x^2 - 3y^2 - 16x + 38 = 0$.

Svolgimento: L'equazione dell'iperbole data si può riscrivere come
$$2(x^2 - 8x) - 3y^2 + 32 + 6 = 0$$
da cui si ottiene
$$2(x^2 - 8x + 16) - 3y^2 = -6$$
e quindi
$$2(x - 4)^2 - 3y^2 = -6\,.$$

Dividendo il primo e il secondo membro per 6 si ha

$$\frac{(x-4)^2}{3} - \frac{y^2}{2} = -1$$

che è la forma canonica dell'iperbole data.
L'equazione

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$$

rappresenta un'iperbole con centro in (x_0, y_0) e con asse trasverso (contenente i fuochi) parallelo all'asse y e di equazione $x = x_0$, mentre l'asse non trasverso è parallelo all'asse x ed ha equazione $y = y_0$. Inoltre i suoi asintoti sono le rette

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0) \quad \text{e} \quad y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)\ .$$

Allora l'iperbole data è centrata nel punto $(4, 0)$ ed ha l'asse trasverso parallelo all'asse y e di equazione $x = 4$ e l'asse non trasverso coincidente con l'asse x. Infine i suoi asintoti hanno equazione

$$y = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(x-4) \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,(x-4)\ .$$

Esercizi: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy

1. una parabola, con asse di simmetria coincidente con l'asse y e vertice nell'origine del sistema di riferimento, ha in comune con la retta t il punto $A \equiv (2, 5)$. La retta t ha coefficiente angolare $1/2$ e interseca ulteriormente la parabola nel punto B. Calcolare l'area del triangolo OAB ;

2. scrivere l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi passante per i punti $A \equiv \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B \equiv \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e calcolare l'area del rombo avente per vertici i fuochi e le intersezioni di tale ellisse con l'asse y ;

3. calcolare la misura dell'area del rettangolo avente per vertici i punti di intersezione della circonferenza di equazione $25x^2 + 25y^2 = 944$ con l'iperbole riferita agli assi, avente semiasse trasverso di misura 5 , passante per il punto $\left(13, \frac{24}{5}\right)$ e fuochi sull'asse x ;

4. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la parabola di equazione $y = x^2 - 3x + k$ e la retta $2x + y = 1$ hanno almeno un punto in comune;

5. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$\frac{x^2}{k^2 - 5k - 2} + \frac{y^2}{k^2 - 16} = 1$$

   non rappresenta né un'ellisse né un'iperbole;

6. scrivere l'equazione dell'ellisse, riferita al centro e agli assi, sapendo che passa per il punto $A \equiv \left(\frac{5}{2}\sqrt{3}, 2\right)$, che l'asse maggiore misura 10 e che i fuochi appartengono all'asse x ;

7. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y = kx + 1$ è tangente all'iperbole $x^2 - 3y^2 = 3$;

8. scrivere l'equazione della parabola avente asse di simmetria parallelo all'asse y, vertice nel punto $V \equiv (3/4, 31/8)$ e passante per il punto $A \equiv (0, 5)$;

9. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + 3y^2 - 2x + 4y - k + 1 = 0$ rappresenta un'ellisse;

10. determinare la misura della corda intercettata dall'iperbole di equazione $4x^2 - 9y^2 = 36$ sulla retta $4x - 3y - 12 = 0$;

11. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 - 4} = 1$$
rappresenta un'ellisse passante per il punto $A \equiv \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\sqrt{15}\right)$;

12. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y = k$ stacca una corda di misura $\sqrt{41/2}$ sull'iperbole, riferita agli assi, passante per i punti $A \equiv (2, 3)$ e $B \equiv (1, -1)$;

13. calcolare la misura della corda staccata dalla parabola di equazione $y = -x^2 + 5x - 6$ sulla retta $x + y + 1 = 0$;

14. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la frazione
$$\frac{2k - 1}{k + 1}$$
rappresenta l'eccentricità di un'ellisse;

15. verificare che le iperboli di equazione $4x^2 - y^2 = 4$ e $x^2 - 4y^2 = -4$ rispettivamente si intersecano in quattro punti che sono i vertici di un quadrato e calcolare il perimetro di tale quadrato;

16. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione
$$3\left(k^2 - 3k + 2\right)x^2 + 3\left(2k^2 + k - 3\right)y^2 - 12\,(3k + 1)\,x + 36\,(k - 2)\,y + 56 = 0$$
rappresenta
   - una circonferenza, di cui si chiede di calcolare il raggio
   - una retta
   - una parabola con asse parallelo all'asse x o coincidente con esso;

17. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le intersezioni della parabola $x = y^2 + y - 2$ con la retta $x - 2y + k = 0$ sono estremi di un segmentodi lunghezza $5\sqrt{5}$;

18. scrivere l'equazione canonica di un'ellisse sapendo che la somma delle misure dei semiassi è 6 e che la somma dei loro reciproci è $3/4$ e che i fuochi stanno sull'asse y;

19. scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto $A \equiv (3, -2)$;

20. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la parabola $y = 2x^2 + x + k$ è tangente alla retta $x - y - 3 = 0$ e calcolare le coordinate del punto di contatto;

21. determinare per quali valori di $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'ellisse di equazione
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
passa per il punto $A \equiv (3, 2)$ ed è tangente in tale punto alla retta di coefficiente angolare $-3/8$;

22. scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, che ha in comune con la circonferenza $x^2 + y^2 = 25$ un punto di ascissa 3, sapendo che è situata nel I e III quadrante. Determinare le coordinate dei punti di intersezione tra tale iperbole e la circonferenza e verificare che sono i vertici di un rettangolo;

23. scrivere l'equazione della parabola avente l'asse parallelo all'asse y, il vertice nel punto $(2, 1)$ e tangente alla retta di equazione $2x + y - 6 = 0$;

24. studiare la curva di equazione $4(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = 16$;

25. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la parabola di equazione $y = x^2 + (2k - 1)x + 1$
    - passa per $A \equiv (1, -2)$
    - ha il vertice sulla bisettrice del II e IV quadrante
    - ha il vertice interno al II quadrante;

26. verificare che l'equazione $8x^2 + y^2 + 16x - 2y + 9 = 0$ rappresenta un'ellisse degenere nel suo centro;

27. scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, sapendo che la sua semidistanza focale è $\sqrt{2}$ e che tale curva non ha punti di intersezione con la retta $y = -x$;

28. determinare i punti di intersezione delle parabole $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, entrambe con asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che $\mathcal{P}_1$ taglia l'asse y nel punto di ordinata 2 e passa per i punti $A \equiv (2, 1)$ e $B \equiv (4, 2)$ e che $\mathcal{P}_2$ passa per $C \equiv (0, 2)$ ed ha vertice in $D \equiv (2, 8)$;

29. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'ellisse di equazione
$$\frac{x^2}{k^2} + y^2 = 1$$
è tangente alla retta $2x + 3y = 6$;

30. un'iperbole equilatera, riferita agli assi, passa per il punto $A \equiv (3, 1)$. Determinare
    - l'equazione dell'iperbole
    - le coordinate dei suoi fuochi F_1 e F_2 e la sua eccentricità

- la misura del perimetro del triangolo F_1AF_2 ;

31. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la parabola di equazione $y = kx^2 + 2\,(k-1)\,x + 1$ ha il vertice sulla bisettrice del I e III quadrante;

32. rappresentare graficamente il luogo dei punti di equazione $x^2 - 4y^2 - x - 2y = 0$;

33. scrivere l'equazione dell'ellisse, riferita al centro e agli assi, sapendo che passa per il punto $A \equiv (-2, -3)$ e che la somma dei reciproci dei quadrati dei semiassi è uguale a $1/7$ e poi calcolare la misura della corda staccata da tale ellisse sulla retta di equazione $x+y-5 = 0$;

34. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la misura della corda intercettata dalla retta $x + y = k$ sull'iperbole $xy = -6$ è uguale a $2\sqrt{30}$;

35. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la curva di equazione
$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{3-k} = 1$$
rappresenta
    - un'ellisse
    - una circonferenza
    - un'ellisse con i fuochi sull'asse y
    - un'ellisse con un fuoco nel punto $F \equiv (0, 1)$.