CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

GEOMETRIA ANALITICA: LE CONICHE

Esercizio 1: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, verificare che la retta di equazione $x - 7y + 10 = 0$ è esterna alla parabola di equazione $x = y^2 + 3y - 4$.

Svolgimento: Basta intersecare la retta con la parabola e verificare che non ci sono punti di intersezione. Studiando il sistema

$$\begin{cases} x - 7y + 10 = 0 \\ x = y^2 + 3y - 4 \end{cases}$$

con il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} x = 7y - 10 \\ 7y - 10 = y^2 + 3y - 4\,, \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} x = 7y - 10 \\ y^2 - 4y + 6 = 0\,. \end{cases}$$

Poiché l'equazione di secondo grado presente nel sistema ha discriminante

$$\frac{\Delta}{4} = (-2)^2 - 6 = -2 < 0$$

il sistema non ammette soluzione.
Allora la retta data non ha punti di intersezione con la parabola e quindi è esterna ad essa.

Esercizio 2: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, determinare le coordinate dei vertici, l'asse maggiore e l'asse minore dell'ellisse di equazione $x^2 + 12y^2 = 9$.

Svolgimento: La forma canonica dell'equazione di un'ellisse riferita al centro del sistema di riferimento e agli assi con i fuochi sull'asse x o sull'asse y è data da

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

dove a e b sono i semiassi.
Per scrivere l'ellisse data in forma canonica basta dividere il primo e il secondo membro

della sua equazione

$$x^2 + 12y^2 = 9$$

per 9. Si ottiene

$$\frac{x^2}{9} + \frac{12y^2}{9} = 1\,,$$

da cui si ha

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2} = 1\,.$$

Allora l'ellisse data ha semiasse maggiore pari a 3, semiasse minore uguale a $\sqrt{3}/2$ e vertici nei punti $(3,0)$, $(-3,0)$, $(\sqrt{3}/2,0)$ e $(-\sqrt{3}/2,0)$.

Esercizio 3: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti e passante per il punto $A \equiv (-4,1)$.

Svolgimento: L'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti è data da

$$xy = k\,, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Per determinare l'equazione dell'iperbole cercata basta imporre che il punto $A \equiv (-4,1)$ verifichi tale equazione e quindi che

$$(-4) \cdot 1 = k\,,$$

da cui segue $k = -4$. Allora l'equazione dell'iperbole cercata è

$$xy = -4\,.$$

Quindi tale iperbole giace nel II e IV quadrante.

Esercizi: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy

1. scrivere l'equazione della parabola avente vertice nell'origine del sistema di riferimento, come asse di simmetria l'asse y e passante per il punto $A \equiv \left(\frac{1}{2}, 4\right)$;
2. scrivere le equazioni delle ellissi riferite al centro e ai propri assi con semiassi 3 e $\sqrt{2}$;
3. scrivere l'equazione dell'iperbole riferita al centro e ai propri assi avente i fuochi sull'asse y sapendo che un semiasse trasverso misura 3 e uno dei fuochi ha ordinata $-\sqrt{17}$;
4. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la parabola di equazione $y = kx^2$ ha il fuoco nel punto $F \equiv \left(0, -\frac{1}{3}\right)$;
5. dimostrare che l'equazione $x^2 + 16y^2 - 6x - 8y + 7 = 0$ rappresenta un'ellisse;
6. scrivere l'equazione dell'ellisse riferita al centro e ai propri assi passante per i punti $A \equiv \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ e $B \equiv (-1,1)$;
7. verificare che la retta di equazione $5x - 4y - 16 = 0$ è tangente all'iperbole $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ e determinare le coordinate del punto di tangenza;

8. determinare le coordinate dei punti di intersezione della parabola di equazione $2y-x^2=0$ con la retta $x+2y-6=0$;

9. stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, che tipo di curva rappresenta l'equazione $x^2-4y^2-k=0$;

10. determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in modo tale che l'ellisse di equazione
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
passi per i punti $A \equiv \left(\sqrt{5}, \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ e $B \equiv \left(1, -\frac{6\sqrt{6}}{5}\right)$;

11. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'iperbole di equazione $4x^2-k^2y^2=4k^2$ è tangente alla retta $y=x+1$;

12. verificare che la retta di equazione $x-3y-1=0$ è esterna alla parabola $2y=x^2$;

13. scrivere l'equazione dell'ellisse avente per asse maggiore il segmento di estremi $A \equiv (-5,0)$ e $B \equiv (5,0)$ e per asse minore il segmento di estremi $C \equiv (0,-3)$ e $D \equiv (0,3)$;

14. verificare che l'equazione $3x^2+4y^2-6x+8y+19=0$ non rappresenta alcuna curva;

15. verificare che l'iperbole di equazione $x^2-y^2-36=0$ non ha punti in comune con la retta $y=3x-3$;

16. disegnare la retta e la parabola rispettivamente di equazione $y=2x-1$ e $y=x^2$ e verificare analiticamente che la retta è tangente alla parabola;

17. trovare le intersezioni dell'ellisse di equazione $3x^2+5y^2=32$ con le bisettrici dei quadranti;

18. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y=3x+k$ ha punti in comune con l'iperbole di equazione $4x^2-y^2=1$;

19. scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x e passante per i punti $A \equiv (2,0)$ e $B \equiv (3,1)$;

20. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y=x+k$ è tangente all'ellisse $2x^2+y^2=2$;

21. scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, passante per il punto $(3,2)$;

22. determinare le coordinate dei punti di intersezione dell'iperbole di equazione $16x^2-25y^2=400$ con la circonferenza avente centro nell'origine del sistema di riferimento e raggio $8\sqrt{10}$;

23. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la parabola di equazione $y=-x^2+7x-6$ e la retta $y=x+k$ sono tangenti e determinare le coordinate del punto di contatto;

24. scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera, riferita ai propri assi, passante per il punto $A \equiv (-2,6)$ e verificare che la retta di equazione $x+3y-16=0$ è tangente all'iperbole;

25. scrivere l'equazione della retta parallela all'asse y che intercetta sulla parabola $y^2 = 3x-4$ una corda di lunghezza 2;

26. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $kx + y + 1 = 0$ non ha punti in comune con l'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$;

27. studiare la curva di equazione $9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 36$;

28. calcolare la lunghezza della corda intercettata dalla retta di equazione $16y = 7$ sulla parabola $y = -x^2 + 4x - 3$;

29. trovare le coordinate dei punti di intersezione dell'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$ con la circonferenza $4x^2 + 4y^2 - 25 = 0$;

30. determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in modo tale che l'iperbole di equazione
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
passi per i punti $A \equiv \left(-4\sqrt{10}, 9\right)$ e $B \equiv \left(8, -3\sqrt{3}\right)$;

31. determinare i punti dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 25$ le cui distanze dalla retta $x - 4y + 3 = 0$ sono uguali a $\dfrac{8}{\sqrt{17}}$;

32. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y = -x + k$ è tangente all'iperbole equilatera, riferita ai propri asintoti, avente distanza focale 8;

33. determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in modo tale che l'ellisse di equazione
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
passi per il punto $A \equiv (6, 3)$ e per il punto B della retta $8x + 9y = 0$ di ordinata 4. Inoltre verificare che l'ellisse così fatta passa per il punto $C \equiv (-36/5, 7/5)$;

34. studiare la curva di equazione $4\,(x-1)^2 + 9\,(y+2)^2 = 36$;

35. stabilire, al variare di $k \in \mathbb{R}$, che tipo di curva rappresenta l'equazione $x^2 - ky^2 = 0$.