CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

GEOMETRIA ANALITICA: LA CIRCONFERENZA

Esercizio 1: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta t di equazione $y = 2x + k$ è tangente, secante o esterna alla circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

Svolgimento: Per stabilire se la retta data è tangente, secante o esterna alla circonferenza basta studiare il sistema

$$\begin{cases} y = 2x + k \\ \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

e verificare se tale sistema ammette una, due o nessuna soluzione rispettivamente.
Usando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} y = 2x + k \\ \\ x^2 + (2x + k)^2 - 2x - 4(2x + k) = 0\,, \end{cases}$$

da cui, calcolando il quadrato del binomio e sommando i monomi simili, segue

$$\begin{cases} y = 2x + k \\ \\ 5x^2 + 2(2k - 5)x + k^2 - 4k = 0\,. \end{cases}$$

Tale sistema ammette una, due o nessuna soluzione a seconda che l'equazione di secondo grado che compare nel sistema stesso ammetta una, due o nessuna soluzione (che rappresentano le ascisse dei punti di intersezione tra la retta t e la circonferenza $\mathcal{C}$ date)e quindi a seconda che il discriminante

$$\Delta = 4(2k - 5)^2 - 20(k^2 - 4k)$$

sia nullo, positivo o negativo. Facendo i calcoli, si ha

$$\Delta = -4(k^2 - 25)$$

e quindi

$$\Delta = 0 \quad \text{se} \quad k = \pm 5$$

$$\Delta > 0 \quad \text{se} \quad -5 < k < 5$$

$$\Delta < 0 \quad \text{se} \quad k < -5 \ \vee \ k > 5\,.$$

Allora

$$\text{la retta } t \text{ è tangente a } \mathcal{C} \text{ se } \; k = \pm 5$$

$$\text{la retta } t \text{ è secante a } \mathcal{C} \text{ se } \; -5 < k < 5$$

$$\text{la retta } t \text{ è esterna a } \mathcal{C} \text{ se } \; k < -5 \;\vee\; k > 5\,.$$

Esercizi: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy

1. stabilire se l'equazione $x^2 + y^2 + x + y + 3 = 0$ rappresenta una circonferenza e, in caso affermativo, determinarne le coordinate del centro e il raggio;

2. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $(k+2)\,x^2 + \left(k^2 - 4\right) y^2 - 2x + y = 5$ rappresenta una circonferenza;

3. scrivere l'equazione della circonferenza avente gli estremi di un diametro nei punti di intersezione della retta $x - 3y = 1$ con la retta $x + 2 = 0$ e della retta $x - 2y = 0$ con la retta $x - 2 = 0$;

4. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + ky = 9$

   - passa per il punto $A \equiv (1, 2)$
   - ha il centro sulla retta $2x - 3y = 14$
   - ha il raggio di misura 5;

5. scrivere le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - x + 3y = 0$ parallele alla retta $y = 3x$;

6. scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(3, 1)$ e tangente alla retta $3x+4y+7 = 0$;

7. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^2 + y^2 + 2kx - 4y - k + 6 = 0$ rappresenta una circonferenza;

8. scrivere l'equazione della circonferenza tangente all'asse x e con centro nel punto $(-3, 2)$;

9. date le circonferenze $x^2 + y^2 - 6x = 0$ e $x^2 + y^2 - 14x + 33 = 0$, scrivere l'equazione della circonferenza che passa per i loro punti di intersezione e per il centro della seconda circonferenza data;

10. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta $3x-4y+k = 0$ è tangente alla circonferenza di centro $(2, -3)$ e raggio 5;

11. scrivere le equazioni delle rette su cui giacciono i lati e le diagonali del quadrilatero avente per vertici i punti di intersezione della circonferenza $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ con gli assi coordinati;

12. verificare che le circonferenze di equazioni $x^2+y^2-2x-7 = 0$ e $x^2+y^2+2x+4y-27 = 0$ rispettivamente sono tangenti internamente;

13. date le circonferenze $x^2+y^2-4x-4y+3=0$ e $x^2+y^2-8x+7=0$, scrivere l'equazione della circonferenza passante per i loro punti di intersezione e che
    - abbia il centro sulla retta $9x-15y-20=0$
    - passi per l'origine del sistema di riferimento;
14. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y=kx$ è secante, tangente o esterna alla circonferenza di equazione $x^2+y^2-6x-2y+9=0$;
15. scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ che passa per i punti $A \equiv (1,0)$, $B \equiv (2,1)$ e $C \equiv (-2,-1)$. Determinare i punti E e F di intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta di equazione $y=7-x$, indicando con E il punto di ascissa negativa, e verificare che i punti C, E e il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ sono allineati;
16. scrivere l'equazione della retta su cui giace la corda comune alle due circonferenze di equazioni $x^2+y^2=9$ e $x^2+y^2-4x-12=0$;
17. scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A \equiv (-3,-2)$ e $B \equiv (1,-1)$ sapendo che l'ascissa del centro è -1;
18. scrivere l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta $y+11=3x$ e tangente alle rette $y+3=0$ e $y-5=0$;
19. determinare le coordinate dei vertici del triangolo isoscele che ha per base il segmento intercettato dalla circonferenza $7x^2+y^2-19x+11y-6=0$ sulla retta $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ed ha il vertice sulla retta parallela alla base e passante per il punto $\left(-2,-\frac{5}{3}\right)$;
20. scrivere l'equazione della circonferenza passante per l'origine del sistema di riferimento e tangente alla retta $x-2y-1=0$ nel punto di ascissa 2;
21. scrivere l'equazione della circonferenza passante per l'origine del sistema di riferimento, ivi tangente alla retta $2x+3y=0$ e avente il centro sulla retta $x+2y-2=0$;
22. scrivere le equazioni delle quattro circonferenze di raggio 4 aventi i centri sugli assi e passanti per l'origine del sistema di riferimento e poi determinare l'equazione della circonferenza passante per i centri delle circonferenze precedenti;
23. scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ tangente alla retta $3x+2y-8=0$ nel punto $(0,4)$ e avente il centro di ordinata 2. Inoltre stabilire per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $y=kx+13$ è tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ nel secondo quadrante e calcolare le coordinate del punto di tangenza;
24. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il centro delle circonferenze di equazione
$$(2k-5)(k-2)\left(x^2+y^2\right)-(3k+5)(k-2)x-(5k-1)(2k-5)y+3\left(2k^2-9k+10\right)=0$$
    è sulla retta $2x+y=8$;
25. scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per l'origine del sistema di riferimento, avente il centro sulla bisettrice del I quadrante e tangente in A alla retta t di equazione $x+y-8=0$. Preso sulla retta t il punto B di ordinata 2, condurre da B la tangente

alla circonferenza $\mathcal{C}$ e indicare con C il punto di contatto: calcolare l'area del triangolo ABC.