CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

GEOMETRIA ANALITICA: LA CIRCONFERENZA

Esercizio 1: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (-2, 1)$ e raggio 5.

Svolgimento: L'equazione di una generica circonferenza di centro $C \equiv (x_0, y_0)$ e raggio r è data da

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \,,$$

quindi l'equazione da determinare è

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25 \,.$$

Sviluppando i quadrati dei due binomi si ha

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 25 \,,$$

da cui, sommando i monomi simili, segue

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \,,$$

che è l'equazione della circonferenza cercata.

Esercizio 2: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, scrivere l'equazione della circonferenza con centro nell'origine del sistema di riferimento e passante per $A \equiv (2, -3)$.

Svolgimento: Poiché la circonferenza da determinare è centrata in $(0, 0)$ e passa per A, il suo raggio sarà pari alla lunghezza del segmento $\overline{AO}$, data da

$$\overline{AO} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \,.$$

Quindi

$$x^2 + y^2 = 13$$

è l'equazione della circonferenza cercata.

Esercizio 3: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, verificare che la retta t di equazione $2x - y - 5 = 0$ è tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ e determinare le coordinate del punto di contatto.

Svolgimento: Basta trovare i punti di intersezione tra la retta e la circonferenza studiando il sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \\ \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$$

e verificare che tale sistema ammette due soluzioni coincidenti.
Usando il metodo di sostituzione si ha

$$\begin{cases} x^2 + (2x-5)^2 - 2x - 4\,(2x-5) = 0 \\ \\ y = 2x - 5\,, \end{cases}$$

da cui, svolgendo il quadrato del binomio e sommando i termini simili segue

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 9 = 0 \\ \\ y = 2x - 5\,, \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ \\ y = 2x - 5\,, \end{cases}$$

che ammette due soluzioni coincidenti date da

$$\begin{cases} x = 3 \\ \\ y = 1\,. \end{cases}$$

Allora la retta t e la circonferenza $\mathcal{C}$ sono tangenti.

Nota: Per verificare se la retta t è tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ si può procedere in un altro modo: basta provare che la distanza tra la retta t e il centro della circonferenza $\mathcal{C}$ è pari al suo raggio r.
L'equazione di $\mathcal{C}$ si può riscrivere come

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5\,,$$

quindi il suo centro è $C \equiv (1, 2)$ e il suo raggio $r = \sqrt{5}$.
Usando la formula della distanza di un punto da una retta, risulta

$$d(C, t) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\,.$$

Essendo $d(C, t) = r$, la retta t e la circonferenza $\mathcal{C}$ sono tangenti.

Esercizi: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy

1. scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (4, 2)$ e raggio 6;

2. scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (2, 3)$ e passante per il punto $A \equiv (0, 1)$;

3. determinare le coordinate del centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 6x - 6y = 0$;

4. scrivere l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento di estremi $A \equiv (-2,1)$ e $B \equiv (4,-2)$;

5. scrivere l'equazione della circonferenza avente il raggio di misura 4 e per centro il punto di intersezione delle rette di equazioni $3x + y = 9$ e $x - 2y + 4 = 0$ rispettivamente;

6. scrivere l'equazione della circonferenza passante per il punto $A \equiv (4,-2)$ e concentrica alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$;

7. stabilire se i punti $A \equiv (2,0)$, $B \equiv (2,-1)$ e $C \equiv (1,1)$ sono interni, esterni o appartengono alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$;

8. scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (2,4)$ e passante per l'origine del sistema di riferimento;

9. stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $\left(k^2 - 10k\right) x^2 + (k-28)\, y^2 - 2x - 3y - 5 = 0$ rappresenta una circonferenza;

10. determinare i punti di intersezione tra la retta $y = x$ e la circonferenza $x^2 + y^2 - 5x + y = 0$;

11. calcolare la lunghezza del segmento $\overline{AB}$, sapendo che A e B sono i punti di intersezione tra la retta $x + y = 1$ e la circonferenza $x^2 + y^2 + 2x - y = 1$;

12. scrivere l'equazione della circonferenza di centro $C \equiv (1,1)$ e raggio $\sqrt{2}$. Verificare che la retta di equazione $y = x + 2$ è tangente alla circonferenza e determinare le coordinate del punto di contatto;

13. verificare che la retta di equazione $x - 2y + 1 = 0$ è esterna alla circonferenza $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$;

14. scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti all'asse x nel punto $(2,0)$ e avente raggio 3;

15. determinare le coordinate del centro e il raggio della circonferenza di equazione $3x^2 + 3y^2 - 8x + 6y - 1 = 0$;

16. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 3x + 4y = 2$ e la retta $y = kx + 1$ sono tangenti;

17. determinare i punti di intersezione tra la circonferenza di centro $C \equiv (3,0)$ e raggio 3 con la circonferenza di centro $C' \equiv (0,3)$ e passante per $A \equiv (-3,3)$;

18. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta $y = x + k$ stacca sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ una corda di lunghezza $3\sqrt{2}$;

19. scrivere le equazioni della tangenti comuni alle circonferenze di equazione

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4} \qquad \text{e} \qquad (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

rispettivamente;

20. determinare i punti di intersezione tra le circonferenze di equazione $x^2+y^2-8x-6y+20=0$ e $2x^2+2y^2-11x+3y=0$ rispettivamente;

21. scrivere l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento compreso tra i punti di intersezione della retta $3x-2y=6$ con gli assi x e y;

22. scrivere l'equazione della circonferenza tangente all'asse y e passante per i punti $A\equiv(-2,4)$ e $B\equiv(-1,3)$;

23. determinare le coordinate del centro e il raggio della circonferenza di equazione $x^2+y^2+4x+2y+5=0$;

24. scrivere l'equazione della circonferenza tangente all'asse y e di raggio 2, sapendo che stacca sulla bisettrice del I quadrante una corda di misura $2\sqrt{2}$;

25. scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A\equiv(-2,0)$, $B\equiv(0,1)$ e $C\equiv(0,-1)$;

26. verificare se il punto $A\equiv(-3,3)$ appartiene alla circonferenza di equazione $x^2+y^2+2x+2y-18=0$;

27. scrivere l'equazione della circonferenza passante per l'origine del sistema di riferimento, per il punto $A\equiv(1,0)$ e tangente alla retta $x-2y+1=0$;

28. determinare per quali valori di $k\in\mathbb{R}$ la retta di equazione $x-2y+k=0$ è esterna alla circonferenza $x^2+y^2-2x+2y-2=0$;

29. scrivere l'equazione della circonferenza tangente all'asse y e con centro nel punto $\left(\frac{2}{3},-1\right)$;

30. scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A\equiv(4,0)$ e $B\equiv(-2,2)$ e avente il cento sulla retta $3x-2y-1=0$.