CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI RELATIVI A

SISTEMI DI RIFERIMENTO
SU UNA RETTA E SU UN PIANO

Esercizio 1: Fissato su una retta un sistema di riferimento con origine O e dati i punti $A \equiv -2$ e $B \equiv 1$, determinare l'ascissa del punto P tale che $3|\overline{AP}| + 2|\overline{BP}| = 7$.

Svolgimento: Indicando con x l'ascissa del punto P e utilizzando la formula della distanza tra due punti $P_1 \equiv x_1$ e $P_2 \equiv x_2$ sulla retta

$$|\overline{P_1P_2}| = |x_1 - x_2|\,,$$

si ha

$$|\overline{AP}| = |x - (-2)| = |x + 2| \qquad \text{e} \qquad |\overline{BP}| = |x - 1|\,.$$

Allora la relazione data diventa

$$3|x + 2| + 2|x - 1| = 7\,. \tag{1}$$

Distinguiamo i vari casi:

- Caso 1: $x < -2$.

  La relazione (1) diventa

  $$3(-x - 2) + 2(-x + 1) = 7$$

  la cui soluzione è $x = -11/5$. Poiché $-11/5 < -2$, tale soluzione è accettabile.

- Caso 2: $-2 \leq x \leq 1$.

  La relazione (1) diventa

  $$3(x + 2) + 2(-x + 1) = 7$$

  la cui soluzione è $x = -1$. Poiché $-2 < -1 < 1$, tale soluzione è accettabile.

- Caso 3: $x > 1$.

  La relazione (1) diventa

  $$3(x + 2) + 2(x - 1) = 7$$

  la cui soluzione è $x = 3/5$. Poiché $3/5 < 1$, tale soluzione non è accettabile.

Allora il problema dato ammette due soluzioni: $P \equiv -11/5$ e $P \equiv -1$.

Esercizi: Fissato su una retta un sistema di riferimento con origine O

1. rappresentare i punti $A \equiv -3$, $B \equiv 1$ e $C \equiv 5/4$. Determinare la lunghezza dei segmenti $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$;
2. determinare i valori che può assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv 1+3k$ e $B \equiv 2k-5$, risulti che la lunghezza $|\overline{AB}|$ del segmento $\overline{AB}$ sia pari a 5;
3. determinare l'ascissa del punto P in modo tale che, dati $A \equiv 1/2$, $B \equiv -1$ e $C \equiv 3$, risulti $|\overline{AB}| + |\overline{PB}| + |\overline{PC}| = 13/2$;
4. determinare le ascisse dei punti C e D che dividono il segmento $\overline{AB}$ in tre parti uguali, sapendo che $A \equiv -5$ e $B \equiv 3/2$;
5. determinare l'ascissa del punto medio del segmento di estremi $A \equiv -2/3$ e $B \equiv 1/2$;
6. il punto medio M del segmento $\overline{AB}$ è $M \equiv \sqrt{3}-2$. Sapendo che $A \equiv -4$, trovare l'ascissa del punto B;
7. dati i punti $A \equiv 2$ e $B \equiv -5$, determinare l'ascissa del punto C simmetrico di A rispetto a B e del punto D simmetrico di B rispetto ad A;
8. dato il punto $A \equiv 1$, determinare l'ascissa del punto P in modo tale che $|\overline{PA}|\ ^2 + 3|\overline{OP}|\ ^2 \leq 3|\overline{OA}|\ ^2$;
9. dati i punti $A \equiv -5$, $B \equiv -1$, $C \equiv 4$ e $D \equiv 10$, trovare le ascisse dei punti medi M e N dei segmenti $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e verificare che $2|\overline{MN}| = |\overline{AC}| + |\overline{BD}| = |\overline{AD}| + |\overline{BC}|$;
10. determinare i valori che può assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv -\sqrt{2}+1$ e $B \equiv \sqrt{2}k$, il punto medio M del segmento $\overline{AB}$ sia $M \equiv -1/2$.

Esercizio 2: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy e dati i punti $A \equiv (-2, 0)$, $B \equiv (2, 0)$ e $C \equiv (0, 2\sqrt{3})$, verificare che il triangolo ABC è equilatero.

Svolgimento: Basta verificare che i tre lati del triangolo abbiano la stessa lunghezza e quindi che

$$|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}|.$$

I punti A e B giacciono sulla stessa retta, avendo stessa ordinata, quindi

$$|\overline{AB}| = |-2-2| = 4\,.$$

Utilizzando la formula della distanza tra due punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ nel piano

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}\,,$$

si ha

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-2-0)^2 + (0-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$$

e

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4\,.$$

Allora $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| = |\overline{BC}| = 4$ e quindi il triangolo è equilatero.

Esercizio 3: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy, determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv (2k, k)$ e $B \equiv (k+1, 3)$, il punto medio M del segmento $\overline{AB}$ abbia coordinate opposte e poi verificare che, in corrispondenza di tale valore, risulta $M \equiv (-1, 1)$.

Svolgimento: Indicando con x l'ascissa di M, deve risultare che $M \equiv (x, -x)$. Le coordinate del punto medio di un segmento di estremi $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ sono date da

$$M \equiv \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)\,.$$

Allora basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{2k+k+1}{2} = x \\ \\ \frac{k+3}{2} = -x\,. \end{cases}$$

Facendo i calcoli si ottiene

$$\begin{cases} 3k + 1 = 2x \\ \\ k + 3 = -2x\,, \end{cases}$$

che equivale a

$$3k + 1 = -(k + 3)$$

la cui soluzione è $k = -1$.
In corrispondenza di tale valore risulta che $A \equiv (-2, -1)$ e $B \equiv (0, 3)$ e quindi il punto medio del segmento $\overline{AB}$ è $M \equiv (-1, 1)$.

Esercizi: Fissato su un piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy

1. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il punto $P \equiv (k + 4, 2k + 3)$ è interno al primo quadrante;

2. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il punto $P \equiv (1 - 3k, 2k - 4)$ appartiene al terzo quadrante;

3. disegnare l'insieme dei punti del piano la cui ordinata è maggiore di 2;

4. disegnare l'insieme dei punti del piano la cui ascissa è maggiore di -1 e minore o uguale a 3 e la cui ordinata è positiva;

5. determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il punto $P \equiv (k^2 - k + 4, 2k + 1)$ è interno alla striscia determinata dalle rette parallele all'asse y e passanti rispettivamente per i punti $A \equiv (6, 0)$ e $B \equiv (0, 2)$;

6. calcolare la distanza dall'asse x, dall'asse y e dall'origine dei punti $A \equiv (1, -\sqrt{3})$ e $B \equiv (-2, 3)$;

7. calcolare la lunghezza dei segmenti aventi come estremi rispettivamente le coppie di punti $A \equiv (-2,3)$, $B \equiv (-2,-5)$ e $C \equiv (3-\sqrt{2},7)$, $D \equiv (8-\sqrt{2},-9)$;

8. determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv (k,1)$ e $B \equiv (2,3-2k)$, risulti $|\overline{AB}| = 2\sqrt{2}$;

9. verificare che il punto $P \equiv (1,5)$ è equidistante dai punti $A \equiv (2,1)$ e $B \equiv (-3,4)$;

10. determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv (k-1,3)$ e $B \equiv (1,k)$, la distanza tra A e B sia uguale alla distanza di $P \equiv (\sqrt{3},\sqrt{2})$ dall'origine;

11. determinare l'ascissa x del punto $P \equiv (x,0)$ equidistante dai punti $A \equiv (1,3)$ e $B \equiv (5,1)$;

12. verificare che il triangolo di vertici $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (3,3)$ e $C \equiv (5,1)$ è rettangolo;

13. verificare che il quadrangolo di vertici $A \equiv (2,2)$, $B \equiv (8,2)$, $C \equiv (10,5)$ e $D \equiv (4,5)$ è un parallelogrammo;

14. determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati tre punti distinti $A \equiv (-k,0)$, $B \equiv (-2,0)$ e $C \equiv (2+k,2\sqrt{3})$, risulti $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$ e poi verificare che il triangolo ABC cos$\grave{\imath}$ ottenuto è equilatero;

15. verificare che il triangolo di vertici $A \equiv (4,0)$, $B \equiv (0,3)$ e $C \equiv (1,-4)$ è isoscele;

16. calcolare il perimetro del triangolo di vertici $A \equiv (1,1/2)$, $B \equiv (-2,3)$ e $C \equiv (3,-2)$;

17. determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv (2,4)$, $B \equiv (9,2)$ e $C \equiv (x,47/4)$, il triangolo ABC sia isoscele sulla base AB;

18. determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv (2,3k)$ e $B \equiv (2,k-7)$, risulti $|\overline{AB}| = 5$. Inoltre , dato il punto C appartente all'asse x, determinare le coordinate di C in modo tale che il triangolo ABC abbia l'area che misura 10;

19. dati gli estremi $A \equiv (1,0)$ e $B \equiv (3,1)$ della base di un triangolo isoscele ABC, determinare le coordinate del punto C sapendo che il perimetro del triangolo misura $\frac{\sqrt{5}(2+\sqrt{53})}{2}$;

20. dati i punti $A \equiv (-2,1)$ e $B \equiv (1,0)$, determinare le coordinate del punto C equidistante da A e B sapendo che la sua ascissa è tripla della sua ordinata;

21. determinare le coordinate del vertice C di un triangolo rettangolo isoscele ABC sapendo che l'ipotenusa $\overline{AB}$ ha per estremi i punti $A \equiv (-1,2)$ e $B \equiv (3,-4)$;

22. determinare le coordinate del punto P equidistante dai punti $A \equiv (2,1)$, $B \equiv (-1,3)$ e $C \equiv (1,4)$;

23. il punto medio di un segmento è $M \equiv (3,-5)$ e uno degli estremi dello stesso segmento è $A \equiv (1,-3)$. Trovare le coordinate dell'altro estremo;

24. determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché, dati i punti $A \equiv (2, k-1)$ e $B \equiv (k+2, 3k)$, il punto medio del segmento $\overline{AB}$ abbia le coordinate uguali;

25. determinare le coordinate del vertice C di un triangolo isoscele ABC, sapendo che gli estremi della base sono i punti $A \equiv (0,2)$ e $B \equiv (2,1)$ e la misura dell'area del triangolo è $5/4$;

26. determinare il valore che puó assumere $k \in \mathbb{R}$ affinché il punto medio del segmento di estremi $A \equiv (2k-1, 1)$ e $B \equiv (k, \frac{k-2}{2})$ disti $\sqrt{17}/4$ dall'origine.