CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA APPLICATA

PRECORSO DI MATEMATICA

ESERCIZI DI

TRIGONOMETRIA: ANGOLI ASSOCIATI

Esercizio 1: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, trovare il valore dell'angolo $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ il cui seno è uguale, in valore assoluto, a

$$\sin \frac{13}{3}\pi\,.$$

Svolgimento: Poiché

$$\frac{13}{3}\pi = 4\pi + \frac{1}{3}\pi\,,$$

si ha

$$\sin\frac{13}{3}\pi = \sin\left(4\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\left(2\cdot 2\pi + \frac{1}{3}\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3}\,,$$

essendo il seno una funzione periodica di periodo 2π.
Quindi l'angolo cercato è $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Esercizio 2: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, trovare i valori degli angoli α, $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ in modo tale che $\sin\alpha$ e $\cos\beta$ siano uguali, in valore assoluto, a

$$\cos 120^\circ\,.$$

Svolgimento: Risulta

$$\cos 120^\circ = \cos(90^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ\,,$$

essendo 120° e 30° angoli che differiscono di 90°. Allora $\alpha = 30^\circ$.

Si ha anche

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ\,,$$

essendo 120° e 60° angoli supplementari. Quindi $\beta = 60^\circ$.

Esercizio 3: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica, sapendo che $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\sin\alpha = \frac{2}{5}$, calcolare il valore di

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Svolgimento: Innanzitutto si ha

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha\,,$$

quindi per calcolare il valore dell'espressione data bisogna determinare $\cos\alpha$. Dalla prima relazione fondamentale della trigonometria

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

segue che

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\,.$$

Tenendo conto del fatto che $\alpha\in\left[\frac{\pi}{2}\,,\pi\right]$, risulta

$$\cos\alpha\leq 0\,,$$

e quindi si ha

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}\,.$$

Sostituendo in tale espressione $\sin\alpha=\dfrac{2}{5}$ si ottiene

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=-\frac{\sqrt{21}}{5}\,.$$

Allora

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\frac{\sqrt{21}}{5}\,.$$

Esercizio 4: Calcolare il valore della seguente espressione (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

$$\frac{\sin(2\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)}-\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)}\,.$$

Svolgimento: Per la periodicità della funzione seno si ha

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha\,.$$

Inoltre risulta

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha\,,$$

essendo α e $-\alpha$ angoli opposti e

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha\,,$$

poiché α e $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ sono complementari.
Infine si ha anche

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\,,$$

essendo α e $\pi+\alpha$ angoli che differiscono di π.

Tenendo conto di queste relazioni l'espressione data si può riscrivere come

$$\frac{\sin(2\pi+\alpha)}{\cos(-\alpha)} - \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 1\,.$$

Esercizio 5: Verificare se vale la seguente identità (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

$$\left[\sin\left(\frac{3}{2}\,\pi+\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{\sin(3\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}+\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}\right]=\frac{1}{\sin\alpha}\,.$$

Svolgimento: Consideriamo il primo membro dell'espressione data. Si ha

$$\sin\left(\frac{3}{2}\,\pi+\alpha\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha\,,$$

essendo la funzione seno periodica di periodo 2π e poiché gli angoli α e $-\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ differiscono di $\dfrac{\pi}{2}$.

Utilizzando le proprietà degli angoli complementari risulta che

$$\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha \qquad \text{e} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha\,.$$

Inoltre, essendo α e $\pi-\alpha$ supplementari si ha

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\,,$$

mentre

$$\sin(3\pi+\alpha)=\sin(2\pi+\pi+\alpha)=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$$

e

$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\,,$$

per le proprietà degli angoli che differiscono di π.

Infine

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha\,,$$

poichè gli angoli α e $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ differiscono di $\dfrac{\pi}{2}$, e

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha\,.$$

Sostituendo tali relazioni nel primo membro dell'espressione data si ottiene

$$\left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\right]\cdot\left[\frac{\sin(3\pi+\alpha)+\cos(-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}+\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)+\cos(\pi+\alpha)}\right]$$

$$=(-\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\left(\frac{-\sin\alpha+\cos\alpha}{-\sin\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot\left(\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha-\cos\alpha)\cdot\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\,(\sin\alpha-\cos\alpha)}$$

$$=\frac{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\,,$$

per la prima relazione fondamentale della trigonometria

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\,.$$

Quindi l'identità data è vera.

Esercizi: Fissata in un piano cartesiano ortogonale xOy una circonferenza goniometrica

1. disegnare gli angoli complementari, supplementari, esplementari, opposti e quelli che differiscono di $90°$ e di $180°$ gradi rispetto ai seguenti

   a. $60°$

   b. $30°$

   c. $\frac{\pi}{4}$

   d. $120°$

   e. $-\frac{\pi}{6}$

   f. $\frac{3}{2}\pi$

   g. $150°$

   h. $\frac{\pi}{3}$

   i. $90°$

   j. $\frac{7}{4}\pi$;

2. trovare il valore dell'angolo $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ il cui seno è uguale, in valore assoluto, a

   a. $\sin 120°$

   b. $\cos \dfrac{5}{12}\,\pi$

   c. $\sin \dfrac{5}{4}\,\pi$

   d. $\sin 330°$

   e. $\cos \dfrac{5}{6}\,\pi$

   f. $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$;

3. trovare il valore dell'angolo $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ il cui coseno è uguale, in valore assoluto, a

   a. $\cos \dfrac{5}{6}\,\pi$

   b. $\cos(-135°)$

   c. $\sin 54°$

   d. $\cos \dfrac{5}{3}\,\pi$

   e. $\sin \dfrac{7}{12}\,\pi$

   f. $\cos 225°$;

4. sapendo che $\alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\sin(\pi + \alpha)$

   b. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

   c. $\tan(-\alpha)$

   d. $\sin(2\pi + \alpha)$

   e. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$

   f. $\cos(-\alpha)$

   g. $\sin(\pi - \alpha)$

   h. $\cos(2\pi - \alpha)$;

5. sapendo che $\alpha \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ e $\cos\alpha = -\dfrac{2}{5}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

   a. $\cot(-\alpha)$

b. $\sin(2\pi + \alpha)$

c. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

d. $\cos(\pi - \alpha)$

e. $\tan(\pi + \alpha)$

f. $\tan(2\pi - \alpha)$

g. $\cos(-\alpha)$

h. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

6. sapendo che $\alpha \in \left[\frac{3}{2}\pi\,, 2\pi\right]$ e $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

a. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

b. $\cot(\pi + \alpha)$

c. $\sin(-\alpha)$

d. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

e. $\cos(2\pi + \alpha)$

f. $\sin(\pi - \alpha)$

g. $\sin(2\pi - \alpha)$

h. $\tan(-\alpha)$;

7. sapendo che $\alpha \in \left[\pi\,, \frac{3}{2}\pi\right]$ e $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

a. $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$

b. $\cos(\pi + \alpha)$

c. $\sin(-\alpha)$

d. $\cos(\pi - \alpha)$

e. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

f. $\cos(-\alpha)$

g. $\tan(2\pi + \alpha)$

h. $\cos(2\pi - \alpha)$;

8. supponendo che siano note le funzioni di $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare i valori delle seguenti espressioni

a. $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

b. $\tan\left(\alpha - \frac{3}{2}\,\pi\right)$

c. $\sin(450^\circ + \alpha)$

d. $\sin(720^\circ - \alpha)$

e. $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$

f. $\cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\,\pi\right)$

g. $\cos(630^\circ - \alpha)$

h. $\sin(\alpha - 270^\circ)$.

Esercizi: Calcolare il valore delle seguenti espressioni (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

1. $\sin(180^\circ - \alpha)\cos(-\alpha) - \sin(-\alpha)\cos(180^\circ + \alpha)$
2. $\sin(3\pi - \alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin(3\pi + \alpha)\sin(-\alpha)$
3. $\sin\left(\alpha + \frac{3}{2}\,\pi\right) + \cos(\pi + \alpha) - \cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\,\pi\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\,\pi + \alpha\right)$
4. $\sin(90^\circ + \alpha)\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha)\cos(180^\circ + \alpha)$
5. $\tan(\pi + \alpha)\sin(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha) - \tan^2(\pi - \alpha)\cos^2(-\alpha)$
6. $\sin\left(\alpha - \frac{7}{2}\,\pi\right) + \cos(\alpha - 3\pi) - \cos\left(-\alpha - \frac{3}{2}\,\pi\right)$
7. $\dfrac{\Big[1 + \sin(180^\circ + \alpha)\Big]\Big[1 + \sin(180^\circ - \alpha)\Big]}{\cos(360^\circ - \alpha)}$
8. $\sin(\pi - \alpha)\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha)\cos(\pi + \alpha)$
9. $\dfrac{\sin(\pi - \alpha)}{1 - \cos(\pi - \alpha)} - \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(\pi + \alpha) + 1}$
10. $\sin(90^\circ + \alpha)\cos\alpha + \cos(90^\circ + \alpha)\sin\alpha - 2\sin(180^\circ + \alpha)\cos(90^\circ - \alpha)$
11. $\dfrac{\cos(-\alpha)}{1 + \sin(2\pi - \alpha)} + \dfrac{\cos(\pi - \alpha)}{\sin(\pi + \alpha) - 1}$
12. $\tan(3\pi - \alpha) + \cot(-\alpha)$

13. $\tan(180^\circ+\alpha)\cdot\left(1-\dfrac{1}{\sin(180^\circ-\alpha)}\right)+\dfrac{1}{\cos(360^\circ-\alpha)}$

14. $\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)$

15. $\tan(180^\circ+\alpha)\cos^2(-\alpha)+\dfrac{\sin^2(180^\circ-\alpha)}{\tan(-\alpha)}$

16. $\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{5}{2}\pi-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)\sin(\pi-\alpha)$

17. $\dfrac{\sin(-\alpha)+\tan(\pi+\alpha)}{\tan(\pi-\alpha)}+\cos(\pi-\alpha)$

18. $\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi+\alpha)-2\cos(-\alpha)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$

19. $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)+\cos(-\alpha)}{1-\tan(\pi-\alpha)}-\dfrac{\sin(2\pi+\alpha)-\cos(2\pi-\alpha)}{\tan(\pi+\alpha)-1}$

20. $2\cos\dfrac{5}{2}\pi+3\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-3\sin\alpha+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\dfrac{3}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right).$

Esercizi: Verificare se valgono le seguenti identità (α assume i valori per i quali sono definite tutte le funzioni che compaiono nell'espressione)

1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi+\alpha)=0$

2. $\sin(450^\circ+\alpha)-\sin(270^\circ-\alpha)=\sin(450^\circ-\alpha)-\sin(270^\circ+\alpha)$

3. $\dfrac{(a+b)^2}{\cos(-\alpha)}+\dfrac{4ab}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)}=\dfrac{(a-b)^2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$

4. $\tan(90^\circ+\alpha)\tan(180^\circ+\alpha)+\tan(90^\circ-\alpha)\tan\alpha=0$

5. $\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\cos(90^\circ-\alpha)-2ab\sin(360^\circ-\alpha)}{a\sin\alpha-b\cos(90^\circ+\alpha)}=(a+b)\tan(180^\circ-\alpha)\tan(\alpha-90^\circ)\ ,\ a\neq -b$

6. $a^2\cos(\pi+\alpha)+b^2\cos(\pi-\alpha)-2ab\sin(-\alpha)\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=(a-b)^2\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)$

7. $\tan(-\alpha)\cot(90^\circ+\alpha)-\cot^2(90^\circ-\alpha)=\tan(180^\circ-\alpha)+\tan\alpha$

8. $$\frac{a^2\cot(\pi+\alpha)+b^2\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{(a+b)\cot(\pi-\alpha)}+\frac{(a+b)\tan\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{2b\cos(-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\,,\quad a\neq -b$$

9. $\cos(270^\circ-\alpha)+\sin(270^\circ+\alpha)+\cot(270^\circ+\alpha)+\sin\alpha=\cot(\alpha-270^\circ)-\sin(90^\circ-\alpha)$

10. $$\frac{\left(a^2+b^2\right)\tan(\pi-\alpha)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{2ab\sin(2\pi-\alpha)}{\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}+(a-b)^2\,\frac{\sin(4\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}\,.$$